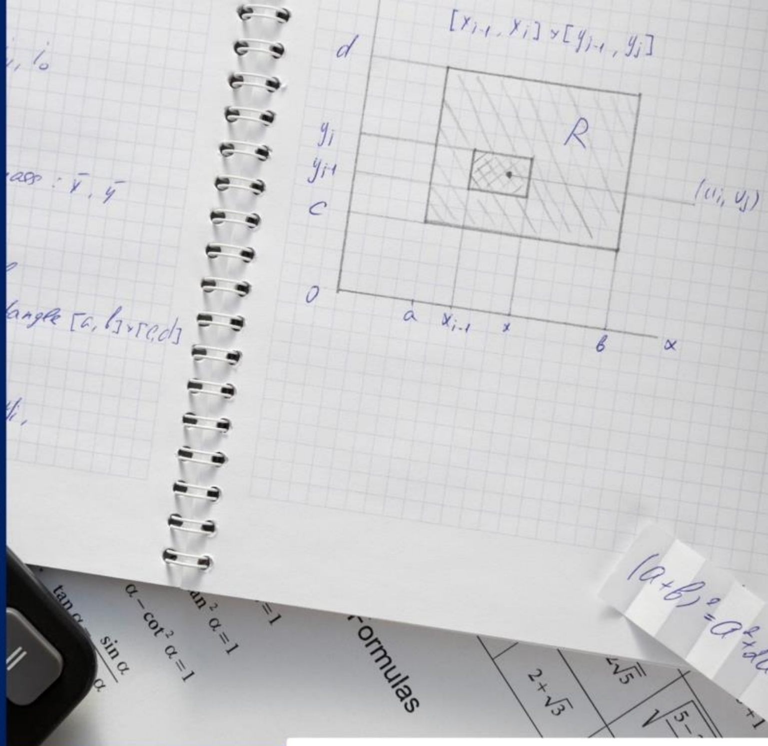
PENGANTAR KALKULUS

Buku ini membahas tentang Konsep Himpunan dan Sistem Bilangan Real, Konsep Fungsi, Limit dan Kekontinuan, Turunan, serta Limit Fungsi Bentuk Tak Tentu.

MAFY media literasi INDONESIA
IKAPI
IKATAN PENERBIT INDONESIA
PT Mafy Media Literasi Indonesia
ANGGOTA IKAPI (041/SBA/2023)
Email: penerbitmafy@gmail.com
Website: penerbitmafy.com

MATAMETIKA
ISBN 978-623-8390-93-9

PENGANTAR KALKULUS



PENGANTAR KALKULUS

Megawati, Adi Asmara, Fajriana,
Yuniar Alam, Budi Witjaksana

PENGANTAR KALKULUS

UU No 28 Tahun 2014 tentang Hak Cipta

Fungsi dan sifat hak cipta Pasal 4

Hak Cipta sebagaimana dimaksud dalam Pasal 3 huruf a merupakan hak eksklusif yang terdiri atas hak moral dan hak ekonomi.

Pembatasan Pelindungan Pasal 26

Ketentuan sebagaimana dimaksud dalam Pasal 23, Pasal 24, dan Pasal 25 tidak berlaku terhadap:

i. penggunaan kutipan singkat ciptaan dan/atau produk hak terkait untuk pelaporan peristiwa aktual yang ditujukan hanya untuk keperluan penyediaan informasi aktual;
ii. penggandaan ciptaan dan/atau produk hak terkait hanya untuk kepentingan penelitian ilmu pengetahuan;
iii. penggandaan ciptaan dan/atau produk hak terkait hanya untuk keperluan pengajaran, kecuali pertunjukan dan fonogram yang telah dilakukan pengumuman sebagai bahan ajar; dan
iv. penggunaan untuk kepentingan pendidikan dan pengembangan ilmu pengetahuan yang memungkinkan suatu ciptaan dan/atau produk hak terkait dapat digunakan tanpa izin pelaku pertunjukan, produser fonogram, atau lembaga penyiaran.

Sanksi Pelanggaran Pasal 113

1. Setiap orang yang dengan tanpa hak melakukan pelanggaran hak ekonomi sebagaimana dimaksud dalam Pasal 9 ayat (1) huruf i untuk Penggunaan Secara Komersial dipidana dengan pidana penjara paling lama 1 (satu) tahun dan/atau pidana denda paling banyak Rp100.000.000 (seratus juta rupiah).
2. Setiap orang yang dengan tanpa hak dan/atau tanpa izin pencipta atau pemegang Hak Cipta melakukan pelanggaran hak ekonomi pencipta sebagaimana dimaksud dalam Pasal 9 ayat (1) huruf c, huruf d, huruf f, dan/atau huruf h untuk Penggunaan Secara Komersial dipidana dengan pidana penjara paling lama 3 (tiga) tahun dan/atau pidana denda paling banyak Rp500.000.000,00 (lima ratus juta rupiah).

PENGANTAR KALKULUS

Megawati, S.Si., M.Si.
Dr. Adi Asmara, M.Pd.
Dr. Fajriana, S.Si., M.Si.
Yuniar Alam, S.Pd., M.Si.
Dr. Ir. Budi Witjaksana, S.T., M.T., IPU., Asean Eng.

MAFY media literasi INDONESIA

PENGANTAR KALKULUS

Penulis:
Megawati, S.Si., M.Si.
Dr. Adi Asmara, M.Pd.
Dr. Fajriana, S.Si., M.Si.
Yuniar Alam, S.Pd., M.Si.
Dr. Ir. Budi Witjaksana, S.T., M.T., IPU., Asean Eng.

Editor:
Andi Asari, M.A.

Desainer:
Tim Mafy

Sumber Gambar Cover:
www.freepik.com

Ukuran:
iv, 101 hlm, 15 cm x 23 cm

ISBN:
978-623-8390-93-9

Cetakan Pertama:
September 2023

PT MAFY MEDIA LITERASI INDONESIA
ANGGOTA IKAPI 041/SBA/2023
Kota Solok, Sumatera Barat, Kode Pos 27312
Kontak: 081374311814
Website: www.penerbitmafy.com
E-mail: penerbitmafy@gmail.com

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR

Segala puji syukur kami panjatkan kepada Tuhan yang maha Esa, karena atas pertolongan dan limpahan rahmatnya sehingga penulis bisa menyelesaikan buku yang berjudul Pengantar Kalkulus. Buku ini di susun secara lengkap dengan tujuan untuk memudahkan para pembaca memahami isi buku ini. Buku ini membahas tentang Konsep Himpunan dan Sistem Bilangan Real, Konsep Fungsi, Limit dan Kekontinuan, Turunan, serta Limit Fungsi Bentuk Tak Tentu.

Kami menyadari bahwa buku yang ada ditangan pembaca ini masih banyak kekurangan. Maka dari itu kami sangat mengharapkan saran untuk perbaikan buku ini dimasa yang akan datang. Dan tidak lupa kami mengucapkan terimakasih kepada semua pihak yang telah membantu dalam proses penerbitan buku ini. Semoga buku ini dapat membawa manfaat dan dampak positif bagi para pembaca.

Penulis, 13 September 2023

BAB 1

KONSEP HIMPUNAN DAN SISTEM BILANGAN REAL

Oleh Megawati, S.Si., M.Si.

1.1 Sejarah Himpunan

Matematika merupakan disiplin ilmu yang menyelidiki dan mengkaji berbagai konsep, prinsip, teorema, aksioma, serta aturan-aturan yang memiliki eksistensi dan relevansi yang mandiri, tetapi juga dapat dihubungkan dengan berbagai bidang dan disiplin ilmu lainnya (Puspitasari, 2012). Para ahli matematika menyimpulkan bahwa himpunan adalah pondasi atau dasar yang mendasari seluruh struktur dan kerangka pemikiran dalam matematika.

Pada akhir abad ke-19 (tahun 1878), seorang matematikawan asal Jerman bernama Georg Cantor pertama kali mengusulkan konsep tentang himpunan. Cantor mengembangkan teori himpunan dengan mendalam, memperkenalkan gagasan tentang himpunan tak terhingga, himpunan terhitung tak terhingga, dan berbagai jenis himpunan tak terhingga yang berbeda keberhinggaannya.

Sejak itu, konsep himpunan telah menjadi landasan yang membentuk hampir semua bagian dalam matematika dan menjadi sumber utama dari keilmuan matematika beserta cabang-cabangnya. Tahun 1920, teori himpunan telah menjadi pondasi utama bagi perkembangan matematika modern dan memberikan landasan bagi pemahaman dan penelitian dalam berbagai bidang matematika (Darwanto, Dinata and Junaidi, 2020).

Pada abad ke-20 konsep himpunan terus berkembang dan digunakan secara luas dalam berbagai bidang matematika, ilmu komputer, logika, dan ilmu lainnya. Dengan kemajuan teknologi dan transformasi digital, konsep himpunan semakin penting dalam pengolahan dan analisis data. Himpunan dan operasi himpunan digunakan secara luas dalam pemodelan dan analisis data besar (*big data*), kecerdasan buatan (AI), dan ilmu data (*data science*).

1.2 Definisi Himpunan

Himpunan merupakan prinsip mendasar dalam perkembangan matematika yang memiliki keterkaitan erat dengan kehidupan sehari-hari (Manurung, Windria and Arifin, 2018). Himpunan ini merupakan contoh bentuk materi dasar dalam matematika (Rizqi, Wijayanti and Basir, 2021). Istilah "himpunan" dalam matematika berasal dari bahasa Inggris "set". Selain itu, terdapat beberapa kata lain yang sering digunakan untuk menyatakan himpunan, seperti kumpulan, kelas, gugus, dan kelompok. Dalam pengertian yang sederhana, himpunan dapat diartikan sebagai kumpulan objek-objek, baik itu berupa objek riil atau abstrak (Darwanto, Dinata and Junaidi, 2020).

Menurut Julius Hambali dan Siskandar (2002:1), himpunan didefinisikan sebagai kumpulan objek, baik konkret maupun abstrak. Adapun contohnya yaitu sekelompok kuda, sekawanan ayam, dan kumpulan huruf yang istilah "kelompok", "kawanan", dan "kumpulan" dapat digantikan dengan istilah "himpunan". Walpole (2010) juga mendefinisikan himpunan sebagai sekumpulan benda atau objek yang dapat didefinisikan dengan jelas. Benda atau objek yang termasuk himpunan disebut elemen (unsur) atau anggota dari himpunan tersebut. (Mumu and Tanujaya, 2018).

Beberapa contoh ilustrasi himpunan dalam konteks matematika:

Contoh 1.1.

Kumpulan bagian tubuh manusia

Kumpulan bagian tubuh manusia adalah himpunan. Himpunan ini berisi beberapa bagian tubuh manusia yang dapat diidentifikasi seperti {Kepala, Tangan, Kaki, Mata, Hati}.

Contoh 1.2.

Kumpulan bilangan prima

Kumpulan bilangan prima adalah contoh himpunan. Himpunan ini berisi semua bilangan prima yang tak terbatas, beberapa contohnya seperti {2,3,5,7,11,...}.

1.3 Notasi Himpunan

Notasi himpunan adalah cara untuk mewakili, menyatakan, dan menggambarkan himpunan matematika. Himpunan adalah kumpulan objek yang memiliki sifat atau karakteristik tertentu. Notasi himpunan digunakan untuk mengidentifikasi elemen yang termasuk dalam himpunan dan menggambarkan hubungan antara himpunan. Notasi himpunan menggunakan huruf kapital (A, B, ...), dan elemen-elemen yang termasuk dalam himpunan tersebut ditulis diantara kurung kurawal, { }. Anggota suatu himpunan ditandai dengan simbol "∈" (termasuk), sedangkan yang bukan anggota himpunan ditandai dengan simbol "∉" (tidak termasuk) (Mumu and Tanujaya, 2018).

Menurut (Sujadi and Dhoruri, 2016) suatu himpunan dapat direpresentasikan menggunakan notasi pembentuk yang mencakup pernyataan tentang sifat atau kriteria yang dimiliki oleh anggota himpunan dan diikuti oleh daftar setiap anggotanya. Dengan cara ini, elemen-elemen yang termasuk dalam himpunan akan dijelaskan dengan jelas dan terurut. Berikut adalah contoh penulisan himpunan dalam bentuk notasi pembentuk himpunan dan daftar anggotanya:

- A = $\{x|x\ bilangan\ bulat\ positif\ kurang\ dari\ 5\}$
  A = {1,2,3,4}
- B = $\{x|x\ adalah\ angka\ ganjil\ antara\ 10\ dan\ 20\}$
  B = {11,13,15,17,19}
- C = $\{x|x\ adalah\ huruf\ vokal\ dalam\ alfabet\}$
  C = {A,E,I,O,U}
- D = $\{x|x\ adalah\ huruf\ pembentuk\ kata\ meja\}$
  D = {m,e,j,a}

Beberapa simbol dan istilah yang umum digunakan dalam notasi himpunan antara lain:

1. Simbol Himpunan: Umumnya, himpunan ditandai dengan huruf besar atau kapital. Contoh: A, B, C, dst.
2. Simbol Elemen: Elemen adalah objek atau anggota yang termasuk dalam himpunan. Elemen biasanya dilambangkan dengan huruf kecil atau huruf biasa. Contoh: a, b, c, dst.
3. Simbol Pertidaksamaan: Simbol ini digunakan untuk menyatakan bahwa suatu elemen bukan anggota dari himpunan. Contoh: Jika A adalah himpunan bilangan genap, maka "b $\notin$ A" berarti b bukan merupakan angka genap dan tidak termasuk dalam himpunan A.
4. Simbol Kepada: Simbol "$\in$" digunakan untuk menyatakan bahwa suatu elemen termasuk dalam himpunan. Misalnya, jika B adalah himpunan bilangan prima, maka pernyataan "7 $\in$ B" berarti angka 7 adalah salah satu anggota dari himpunan B, yaitu himpunan bilangan prima.

5. Simbol Gabungan: Simbol "∪" digunakan untuk menyatakan operasi penggabungan (irisan) dari dua himpunan. Penggabungan dari himpunan A dan B adalah himpunan yang terdiri dari semua elemen yang terdapat di A atau B atau keduanya.
6. Simbol Irisan: Simbol "∩" digunakan untuk menggambarkan irisan dari dua himpunan. Irisan antara himpunan A dan B adalah himpunan yang berisi elemen-elemen yang ada di himpunan A maupun himpunan B.
7. Simbol Subset: Simbol "⊆" atau "⊂" digunakan untuk menyatakan bahwa suatu himpunan merupakan subset dari himpunan lain. Jika semua elemen yang ada dalam himpunan A juga terdapat dalam himpunan B, maka A adalah subset dari B.
8. Simbol Superset: Simbol "⊇" atau "⊃" digunakan untuk menunjukkan bahwa suatu himpunan mencakup atau memasukkan himpunan lain. Jika semua elemen dalam himpunan B adalah elemen dari himpunan A, maka B adalah superset dari A.
9. Simbol Himpunan Kosong: Simbol "∅" adalah cara untuk melambangkan himpunan kosong, yakni himpunan tanpa elemen.

Notasi himpunan sangat penting dalam matematika karena membantu dalam menyatakan dan memahami hubungan antara himpunan, melakukan operasi himpunan, dan membentuk dasar untuk berbagai cabang matematika seperti teori himpunan, teori peluang, dan teori bilangan.

1.4 Macam-Macam Himpunan

1) Himpunan Kosong

Himpunan kosong adalah himpunan yang tidak mempunyai elemen (Amelia and Ristiana, 2022). Lambang atau notasi yang digunakan untuk himpunan kosong adalah dengan Φ atau { }.

Beberapa hal penting mengenai himpunan kosong:

a. Representasi: Himpunan kosong dapat direpresentasikan dengan simbol "Ø" atau "{}". Simbol ini menandakan bahwa tidak ada elemen yang termasuk dalam himpunan.
b. Sifat: Himpunan kosong memiliki karakteristik unik dikarenakan mempunyai sifat khusus. Himpunan kosong termasuk sebagai subset dari seluruh himpunan, termasuk menjadi subset dari dirinya sendiri. Dengan kata lain, untuk setiap himpunan A, himpunan kosong adalah bagian dari A dan ditulis sebagai $\emptyset \subseteq A$.
c. Operasi Himpunan: Dalam operasi himpunan seperti gabungan (*union*) dan irisan (*intersection*), himpunan kosong memiliki sifat khusus. Gabungan himpunan kosong dengan himpunan apapun akan menghasilkan himpunan yang identik dengan himpunan yang lain. Irisan himpunan kosong dengan himpunan apapun akan selalu menghasilkan himpunan kosong. Contoh operasi himpunan dengan himpunan kosong:
   Jika $A = \{1, 2, 3\}$ dan $B = \emptyset$, maka $A \cup B = \{1, 2, 3\}$ dan $A \cap B = \emptyset$.
   Contoh himpunan kosong:
   Contoh 1.3.
   - Himpunan A terdiri dari mahasiswa yang belajar di jurusan Agribisnis perikanan di Politeknik Pertanian Negeri Pangkajene dan Kepulauan dengan usia 6 tahun.
   - Himpunan B adalah himpunan bilangan asli yang lebih kecil dari 1.
   - Himpunan C adalah himpunan hari yang berawalan ”U”.
   - Himpunan D adalah himpunan bilangan ganjil yang habis dibagi 2.

Keterangan: angka nol (0) tidak termasuk dari himpunan kosong melainkan adalah elemen dari himpunan yang memiliki nilai nol (0). Sebagai contoh, pada himpunan yang terdiri dari lima bilangan cacah pertama, angka nol menjadi salah satu elemen dalam himpunan bilangan tersebut. (Nugraha and Dwiyana, 2021).

2) Himpunan Semesta (*Universum*)

Himpunan semesta yang dapat dilambangkan dengan simbol S atau U adalah himpunan yang terdiri dari semua objek yang menjadi topik pembicaraan (Aprianto, 2016). Himpunan ini menjadi batasan atau lingkup untuk semua himpunan lain yang sedang dipertimbangkan dalam konteks tersebut.

Beberapa poin penting mengenai himpunan semesta:

a. Representasi: Himpunan semesta biasanya dilambangkan dengan huruf kapital seperti U, V, atau Ω.
b. Batasan Konteks: Himpunan semesta menetapkan batasan untuk semua himpunan yang terkait dalam suatu masalah atau konteks tertentu. Semua himpunan lain adalah subset atau bagian dari himpunan semesta. Contoh: Misalnya, dalam konteks menghitung bilangan bulat yang lebih kecil dari 10, maka himpunan semesta (biasanya dilambangkan dengan U) akan berisi semua bilangan bulat positif yang lebih kecil dari 10, yaitu $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.
c. Subset dan Universal Set: Setiap himpunan yang dibahas dalam konteks tersebut harus menjadi subset dari himpunan semesta. Misalnya, jika A adalah himpunan bilangan genap yang lebih kecil dari 10, maka $A = \{2, 4, 6, 8\}$ dan $A \subseteq U$.
d. Operasi Himpunan: Himpunan semesta juga terlibat dalam operasi himpunan seperti gabungan (*union*) dan irisan (*intersection*). Contoh, jika B adalah himpunan bilangan prima yang lebih kecil dari 10, maka $B = \{2, 3, 5, 7\}$ dan $B \cap U = \{2, 3, 5, 7\}$ karena irisan antara himpunan B dan himpunan semesta U adalah himpunan B itu sendiri.

Contoh himpunan semesta:

Contoh 1.4.

- Himpunan A = {2, 3, 5, 7}. Himpunan semesta yang memungkinkan adalah S = {bilangan prima}. Namun, perlu diingat bahwa ada banyak pilihan lain yang bisa menjadi himpunan semesta untuk A. Contoh lain termasuk himpunan bilangan asli, himpunan bilangan cacah, himpunan bilangan bulat dan sebagainya.
- Jika B = {merah, kuning, hijau}, maka beberapa contoh himpunan semesta yang mungkin mencakup S = {warna-warna lampu lalu lintas} atau S = {warna-warna pelangi} dan sejenisnya.

3) Himpunan Hingga

Himpunan hingga yang juga disebut himpunan himpunan terhingga atau *finite set* adalah himpunan yang memiliki jumlah anggota yang terbatas dan dapat dihitung (Siregar, 2022). Contoh-contoh himpunan hingga:

Contoh 1.5.

- Himpunan A = {1, 2, 3, 4, 5}: Himpunan ini terdiri dari lima anggota, yaitu bilangan bulat dari 1 hingga 5.
- Himpunan B = {apel, jeruk, pisang, mangga}: Himpunan ini terdiri dari empat anggota, yaitu nama-nama buah.
- Himpunan C = {Mercury, Venus, Bumi, Mars, Jupiter, Saturnus, Uranus, Neptunus}: Himpunan ini terdiri dari delapan anggota, yaitu planet-planet dalam Tata Surya.

4) Himpunan Tak Hingga

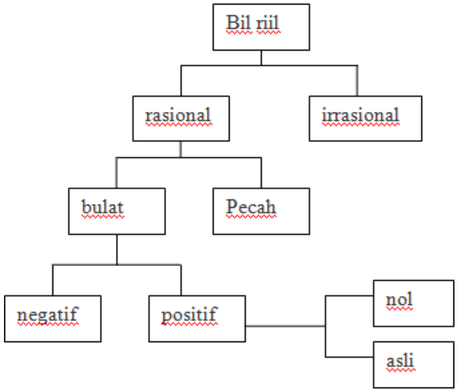
Himpunan tak hingga yang sering disebut *infinite set* adalah himpunan yang memiliki jumlah anggota yang tak terhingga atau tak terbatas (Warsito, 2021). Artinya, elemen-elemen dalam himpunan tak hingga tidak dapat dihitung atau dihitung secara akurat karena jumlahnya tidak berakhir.

Contoh-contoh himpunan tak hingga:
Contoh 1.6.

- Himpunan bilangan asli (N): Himpunan ini terdiri dari semua bilangan bulat positif, dimulai dari 1 dan tidak berakhir. Jadi, jumlah anggota dalam himpunan N adalah tak terhingga: N = {1, 2, 3, 4, 5, ...}.
- Himpunan bilangan bulat (Z): Himpunan ini terdiri dari semua bilangan bulat, termasuk bilangan negatif, nol, dan positif. Jumlah anggota dalam himpunan Z juga tak terhingga: Z = {..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...}.
- Himpunan bilangan real (R): Himpunan ini mencakup semua bilangan rasional dan irasional. Himpunan bilangan real juga memiliki jumlah anggota tak terhingga karena termasuk semua angka pada garis bilangan: R = {x | x adalah bilangan real}.

1.5 Sistem Bilangan Real

Himpunan bilangan real dapat dibagi menjadi dua bagian, yaitu himpunan bilangan rasional dan himpunan bilangan irasional (Puspitasari, 2012). Sistem bilangan real, yang dilambangkan dengan R, memiliki sifat sebagai medan terurut dengan batas atas terkecil, serta termasuk medan terurut Q sebagai submedannya. Dengan kata lain, Q adalah bagian dari R, dan setiap himpunan E yang merupakan subhimunan dari R, tidak kosong, dan terbatas ke atas, pasti memiliki batas atas terkecil dari anggota-anggota yang ada dalam R. Setiap elemen dari R disebut sebagai bilangan real. (Soemantri, 2021). Gambar 1 menunjukkan diagram dari pohon bilangan.



Gambar 1. Diagram Pohon Bilangan

1) Bilangan Rasional

Bilangan rasional adalah bilangan yang dapat ditulis dalam bentuk pecahan seperti $\frac{p}{q}$, di mana p dan q adalah bilangan bulat dan q tidak sama dengan nol. Notasi umum untuk himpunan bilangan rasional adalah "Q" yang berasal dari kata "*quotient*" (pembagi), karena bilangan rasional dapat dinyatakan dalam bentuk pecahan yang terdiri dari pembilang (p) dan penyebut (q).

Contoh bilangan rasional:

Contoh 1.7.

1. $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}$: Bilangan ini dapat diwakili dalam bentuk pecahan, pembilang dan penyebut adalah bilangan bulat.

2. -3, 0, 7: Semua bilangan bulat juga termasuk dalam kategori bilangan rasional karena masing-masing dapat diinterpretasikan sebagai pecahan dengan penyebut 1.

3. 0.125, -1.75: Bilangan desimal yang berhingga atau berulang juga merupakan bilangan rasional, karena dapat diwakili dalam bentuk pecahan.

Bilangan rasional memiliki sifat khas, seperti kemampuan untuk dilakukan perhitungan secara akurat. Ini mencakup operasi penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian yang selalu menghasilkan bilangan rasional.

Selain itu, setiap bilangan rasional memiliki elemen invers yang dapat ditemukan dalam operasi penjumlahan dan perkalian. Himpunan bilangan rasional (Q) mencakup bilangan-bilangan yang umum digunakan dalam keseharian, seperti pecahan, angka desimal, dan bilangan bulat.

2) Bilangan Irasional

Bilangan irasional adalah bilangan yang tidak dapat dinyatakan dalam bentuk pecahan $\frac{p}{q}$, dengan p dan q sebagai bilangan bulat dan q $\neq$ 0. Bilangan irasional merupakan bilangan yang tidak memiliki representasi desimal yang berhingga atau berulang.

Contoh bilangan irasional:

Contoh 1.8.

1. $\sqrt{2}$: $\sqrt{2}$ adalah bilangan irasional karena tidak dapat diwakili sebagai pecahan dan memiliki representasi desimal yang berlanjut tanpa akhir.
2. π (phi): π adalah bilangan irasional yang merupakan perbandingan keliling lingkaran dengan diameternya. Nilai π adalah 3.14... Bilangan ini memiliki representasi desimal yang berlanjut tanpa pola berulang.
3. e (bilangan euler): e adalah bilangan irasional yang merupakan konstanta matematika yang sangat penting. Nilai e adalah 2.71... dan memiliki representasi desimal yang berlanjut tanpa pola berulang.

Bilangan irasional memiliki sifat khusus dan kompleks, serta mencakup sebagian besar bilangan pada garis bilangan. Himpunan bilangan irasional dan bilangan rasional bersama-sama membentuk himpunan bilangan real yang mencakup seluruh bilangan pada garis bilangan. Bilangan irasional juga memiliki aplikasi luas dalam berbagai bidang matematika dan ilmu pengetahuan.

DAFTAR PUSTAKA

Amelia, R. and Ristiana, M.G. (2022) 'Analisis Kesalahan Siswa SMP Kelas VII dalam Menyelasikan Soal Materi Himpunan Melalui Pembelajaran Daring', *JPMI (Jurnal Pembelajaran Matematika Inovatif)*, 5(6), pp. 1635–1644.

Aprianto, N.H. (2016) *Teorema Himpunan*. Jakarta: Trustco.

Darwanto, Dinata, K.B. and Junaidi (2020) *Teori Himpunan*. Lampung: Universitas Muhammadiyah Kotabumi.

Manurung, M.M., Windria, H. and Arifin, S. (2018) 'Desain Pembelajaran Materi Himpunan Dengan Pendekatan Realistic Mathematics Education (RME) Untuk Kelas VII', *Jurnal Turunan: Jurnal Matematika dan Pendidikan Matematika*, 5(1), pp. 19–29.

Mumu, J. and Tanujaya, B. (2018) 'Desain Pembelajaran Materi Operasi Pada Himpunan Menggunakan Permainan "Lemon Nipis"', *Jurnal Honai Math*, 1(1), pp. 14–23.

Nugraha, A. and Dwiyana, A.Sy. (2021) 'Himpunan', in *Dasar-Dasar Matematika dan Sains*. 2nd edn. Tangerang Selatan: Universitas Terbuka.

Puspitasari, N. (2012) 'Hidup Manusia di Dunia Konvergen Ke f (X) = 0', *Mosharafa: Jurnal Pendidikan Matematika*, 1(2), pp. 59–62.

Rizqi, M.M., Wijayanti, D. and Basir, M.A. (2021) 'Analisis Buku Teks Matematika Materi Himpunan Menggunakan Model Prakseologi', *Delta: Jurnal Ilmiah Pendidikan Matematika*, 9(1), pp. 57–76.

Siregar, R.R. vania (2022) *Teori Peluang dan Kombinatorika 'Himpunan'*. Universitas Kristen Indonesia.

Soemantri, R. (2021) 'Sistem Bilangan Real', in *Analisis I*. 2nd edn. Tangerang Selatan: Universitas Terbuka.

Sujadi, Dr.I. and Dhoruri, Dra.A. (2016) *Teori Belajar, Himpunan, dan Logika Matematika*. Direktorat Jenderal Guru dan tenaga Kependidikan.

Warsito, M. (2021) ‘Himpunan dan Operasinya’, in *Pengantar Matematika*. 2nd edn. Tangerang Selatan: Universitas Terbuka.

BAB 2

KONSEP FUNGSI

Oleh Dr. Adi Asmara, M. Pd.

2.1 Definisi Fungsi

- Misal terdapat 2 buah kelompok M dan N yang masing-masing unsur M bertalian dan memiliki hubungan tertentu dengan masing-masing unsur di N, disebut “Fungsi”
- Bila f merupakan fungsi M menuju N maka di tulis.
  $f : M \rightarrow N$

Artinya f melukiskan kelompok M menuju kelompok N.
M dikatakan wilayah awal dan N dikatakan kowilayah atau wilayah hasil.

2.2 Konsep Fungsi

Konsep fungsi memiliki hubungan yang baik atas relasi
Misal :
$f(x) = x^2 + 8x - 2$, jadi x = 3 ……
Jawab :
Bila x = 3, f (x) = ……..
$f(x) = x^2 + 8x -2$

$f(3) = 3^2 + 8.3 - 2$

$= 9 + 24 - 2$

$= 31$

Sehingga $f(x) = x^2 + 8x - 2$ bernilai 31 jika $x = 3$.

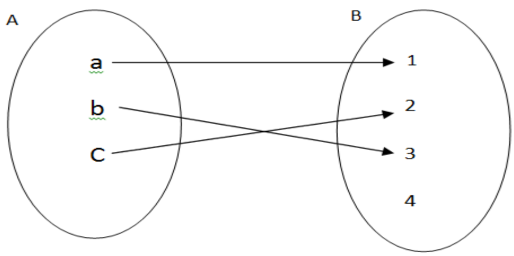
2.3 Fungsi dan Relasi

Relasi membentuk suatu jaringan materi-materi 2 bilangan sembarang. Kelompok-kelompok tersusun membentuk kelompok penggalan atas hasil Cartesius celah arena serta koarena.

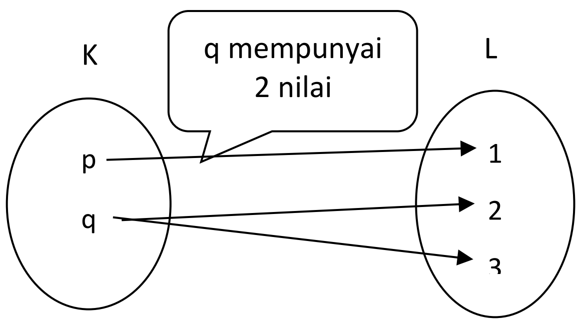
A. Fungsi mewujudkan relasi, cuma konsep fungsi sangat ketat dipadankan atas konsep relasi.

   Ciri fungsi:

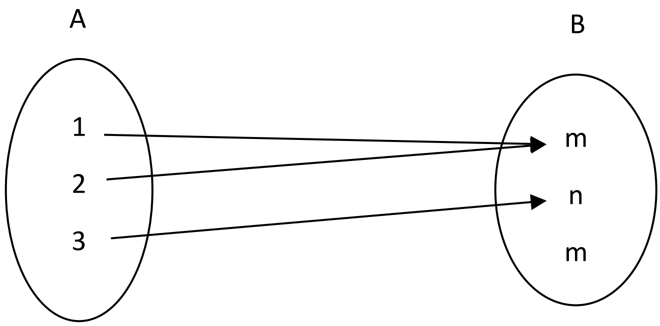
   1) Unsur atas kelompok A wajib semuanya ada atas pasangan tersusun



   2) Elemen K dilarang kelihatan 2x/lebih dari 1x dalam pasangan terurut.



Contoh di bawah adalah fungsi yang benar dan sesuai aturan



2.4 Ragam Fungsi

A. Sifat Fungsi

1. Fungsi Ke Into

   f : M ▼ N merupakan fungsi Into bila masing-masing elemen kelompok M memiliki pantulan yang berbeda, yang berarti tidak terdapat 2 elemen M yang memiliki pantulan yang sama pada N. Sehingga bila $m_1 = m_2$, maka $f(m_1) = f(m2)$ berlaku juga bila m_1 *x* m_2 maka $f(m_1)$ x $f(m_2)$.

   Misal

   $f : K$ ▼ K dengan $f(x) = x-1$

   ambil $f(x) = f(y)$ maka x-1 = y-1 sehingga x = y.

2. Fungsi Srjektif

   $f : M$▼N merupakan fungsi Srjektif bila dan hanya bila ∀ n ∈ N, ∃ m ∈ M sehingga f(m) = n

   Misal :

   $f : M$▼N dengan $f(x) = x-1$

   Misalkan y Ɛ M maka terdapat x = y + 1

   sehingga $f(x) = x - 1 = (y + 1) - 1 = y$.

3. Fungsi Bijektif

   $f : M$▼N adalah fungsi bijektif bila dan hanya bila f adalah fungsi injektif dan surjektif

Misal

$f : M \blacktriangledown M$ dengan $f(x) = x$-1 karena f adalah fungsi injektif dan surjektif

B. Jenis Fungsi

1. Fungsi Aljabar

Fungsi yang menggunakan operasi aljabar seperti +, -, x, : $\sqrt{\ }$ disebut fungsi Aljabar.

➢ Fungsi Rasional

Fungsi yang memiliki variabel dependen dan memiliki pangkat bilangan bulat disebut fungsi Rasional. Bahasan fungsi rasional adalah :

- Fungsi Suku Banyak

  Fungsi yang memiliki polinomial disebut fungsi Suku banyak, notasinya

  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$

  dimana $a_n \neq 0$

  a_0 = konstanta

  a_n , a_{n-1} , …..a, a_0 = bilangan real

  Misal : $5x^3 + 5x^2 + 7x - 9$

- Fungsi Kubik

  Fungsi yang memiliki pangkat tiga disebut fungsi Kubik.

  Bentuk $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, dan $a \neq 0$

  Contoh : $5x^3 + 7x^2 + 3x + 9$

- Fungsi Linear

  Fungsi yang memiliki variabel pangkat satu dan mempunyai grafik yang garis lurus disebut Fungsi Linear.

  $f(x) = ax + b$ dengan a,b = konstan dan $a \neq 0$

  Contoh : $y = 3x + 9$

  Langkah mengambar grafik fungsi linear:

  a. Menentukan point temu atas absis x, y=0 didapat titik M(x_1 ,0)

b. Menentukan point temu atas ordinat y, x=0 didapat titik N $(0, y_1)$

c. Kaitkan 2 point M dan N serta membentuk garis yang lurus.

Contoh :

Buat grafik atas persamaan y = 3x + 9

Jawab :

Menentukan point temu atas ke 2 sumbu:

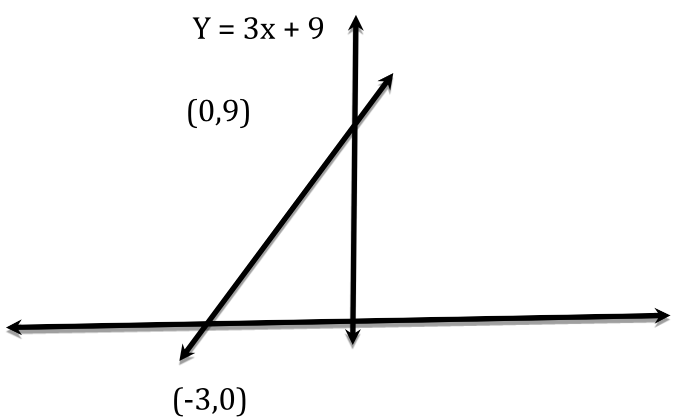
- point temu atas ordinat y, bila x=0, y = ……

$$y = 3x + 9$$
$$y = 0 + 9$$
$$y = 9$$
$$(0,9)$$

- point temu atas absis x, bila y = 0, x = ……..

$$y = 3x + 9$$
$$0 = 3x + 9$$
$$x = -3 \Rightarrow (-3,0)$$

- Lalu tarik garis yang lurus atas point titik tersebut, didapat gambar grafik :



Soal :

Gambar grafik fungsi linear :

1. y = 6 + 6x
2. y = -2x + 8
3. y = - 12 + 4x

Jawab:

1. point temu atas ordinat y, bila x = 0, y = ……..

   y = 6 + 6x

   y = 6 + 6 (0)

   y = 6 .... (0,6)

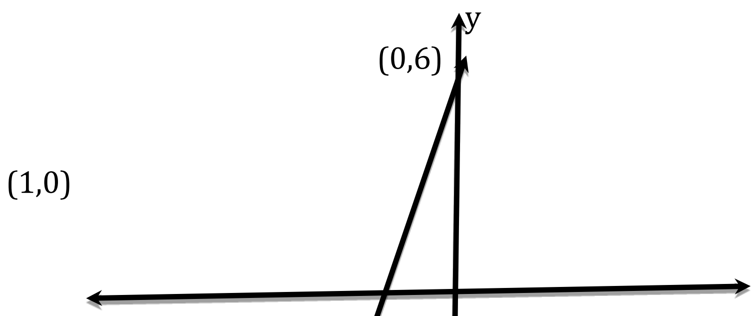
   point temu atas absis x, bila y = 0, x = ……..

   y = 6 + 6x

   0 = 6 + 6x

   -6 = 6x

   x = -1...........(-1,0)



2. Point temu atas sumbu y, bila x = 0, y = ………

   y = – 2x   + 8

   y = – 2(0) + 8

   y = 8...................(0,8)

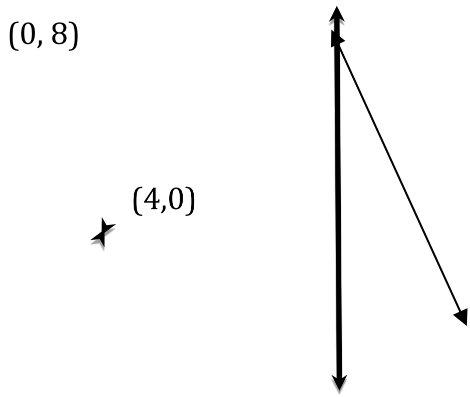
   point temu atas sumbu x, bila y = 0 maka x bernilai:

   y = – 2x + 8

   0 = – 2x + 8

   2x = 8

   x = 4................(4,0)

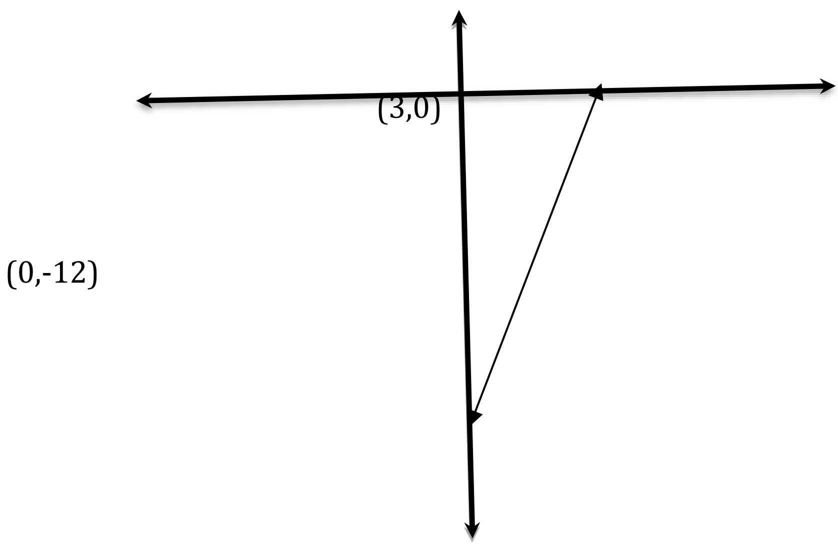


3. Point temu atas ordinat y, bila x = 0, y = ……..

$y = - 12 + 4x$
$y = - 12 + 4\ (0)$
$y = -12$……………..(0,-12)

point temu atas absis x, bila y = 0, x = ……

$y = - 12 + 4x$
$0 = - 12 + 4x$
$12 = 4x$
$x = 3$………………(3,0)



- Fungsi Kuadrat

  Fungsi yang memiliki pangkat dua disebut fungsi kuadrat. Cirinya :

  a. Bila a positif, maka grafik terbuka ke atas dan memiliki point ulang minim. (point puncak memiliki kadar terkecil)
  b. Bila a negatif, maka grafik terbuka ke bawah serta memiliki point ulang maksim. (point puncak memiliki kadar terbesar)
  c. Bila D adalah diskriminan fungsi kuadrat atas $f(x) = ax^2 + bx + c$, didapat:
     - Bila Diskriminan positif, maka grafik $y = f\ (x)$ mengenai absis x atas point yang lain
     - Bila Diskriminan negatif, maka grafik $y = f(x)$ mengenai absis x atas suatu point.
     - Bila Diskriminan negatif, maka grafik $y = f(x)$ tidak mengenai sumbu x.
  d. Notasinya $f(x) = ax^2 + bx + c$, dengan a, b, c adalah konstan, $a \neq 0$

     Misal : $7x^2+6x+9$

     Grafik persamaa $y = ax^2 + bx + c$ akan memiliki bentuk parabola.
  e. Metode menggambarkan grafik fungsi kuadrat:
     - Menentukan point temu absis x, $y = 0$ didapat titik $(x_1, 0)$
     - Menentukan point temu ordinat y, $x= 0$ didapat titik $(0, y_1)$
     - Menentukan point puncak (x_p, y_p)

       $Xp = -b/2a$ $\qquad$ $Yp = D/-4a$

       D = Diskriminan (b^2-4ac)
     - Lalu kaitkan point-point titik tersebut dan membangun grafik parabola.

Misal :

Gambar grafik fungsi kuadrat atas $2y = 2x^2-8x-10$

Jawab:

a. Menentukan point temu absis x, y = 0

   $2y = 2x^2 - 8x – 10 => 0 = (2x + 2) (x - 5)$,

   $2x + 2 = 0$ atau $x - 5 = 0$

   $X = -1$ atau $x = 5$

   point temu sumbu x adalah (-1,0) dan (5,0)

b. Menentukan point temu ordinat y, x = 0

   $2y = 2x^2 - 8x - 10$

   $2y = 2(0)^2 - 8(0) – 10$

   $2y = -10$

   $Y = -5$

   point temu sumbu y adalah (0,-5)

c. Gunakan –b/2a untuk menentukan Persamaan sumbu simetri

   $2y = 2x^2 - 8x – 10 => y = x^2 - 4x – 5=>$

   $= -(-4)/2.1$

   $= 2$

d. Gunakan b^2 - 4ac / -4a, untuk nilai maks/min

   $2y = 2x^2 - 8x – 10 => y = x^2 - 4x – 5$

   $= \{(-4)^2 - 4.(1).(-5) / -4 (1)\}$

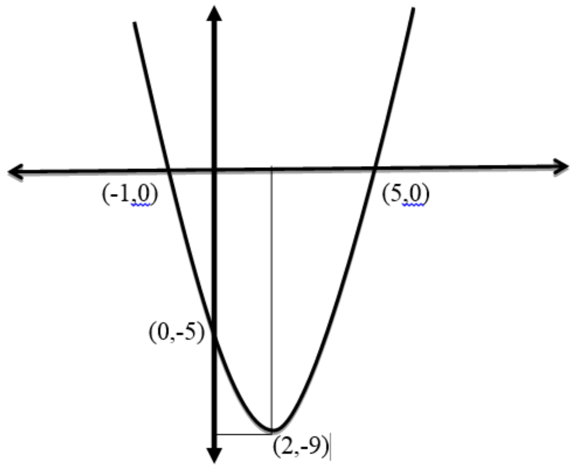
   $= 36 / -4$

   $= -9$

e. Gunakan (–b/2a, b^2 - 4ac / -4a) untuk menentukan point puncak

   (2,-9)

f. Di peroleh grafik:



Soal Fungsi Kuadrat:

1. Gambar grafik dari $\frac{1}{2}y = -6 + 2x - \frac{1}{2}x^2$
2. Gambar grafik dari $2y = 4x^2 + 8x - 12$

Jawab:

1. $\frac{1}{2}y = -6 + 2x - \frac{1}{2}x^2$

   $Y = -12 + 4x - x^2$

   point temu absis x, y=0

   $y = -12 + 4x - x^2$

   $0 = (6 + x)(-2 + x)$,

   $x = -6$ atau $x = 2$

   $0 = -12 + 4x - x^2$

   point temu absis x (-6,0) dan (2,0)

   point temu ordinat y, x = 0

   $\frac{1}{2}y = -6 + 2x - \frac{1}{2}x^2$

   $\frac{1}{2}y = -6 + 2(0) - \frac{1}{2}(0)^2$

   $\frac{1}{2}y = -6 + 2(0) - (0)^2$

   $y = -12$

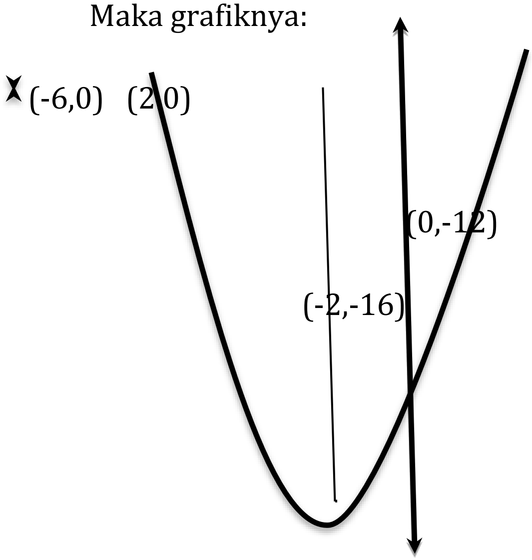
   Maka point temu ordinat y : (0,-12)

Persamaan sumbu simetri $-b/2a$
$= -(4)/2.1$
$= -2$

Nilai maks/ min $b^2 - 4ac / -4a$
$= \{(4)^2 - 4.(1).(-12) / -4 (1)\}$
$= 16 + 48 / -4$
$= -16$

point puncak $\{(-b/2a), (b^2 - 4ac/-4a)\} =$
$(-2,-16)$

Maka grafiknya:



2. $2y = 4x^2 + 8x - 12$
point temu absis x, y=0
$2y = 4x^2 + 8x - 12$
$y = 2x^2 + 4x - 6$
$0 = (2x - 2)(x + 3),$
$x = 1$ atau $x = -3$
$0 = 2x^2 + 4x - 6$
point temu absis x (1,0) dan (-3,0)

point temu ordinat y, x = 0

$$2y = 4x^2 + 8x - 12$$

$y = 2x^2 + 4x - 6$

$y = 2(0)^2 + 4(0) - 6$..........$y = -6$

Point temu ordinat y : (0,-6)

Persamaan sumbu simetri

$-b/2a = -(4)/2.2 => -1$

Nilai maks/ min

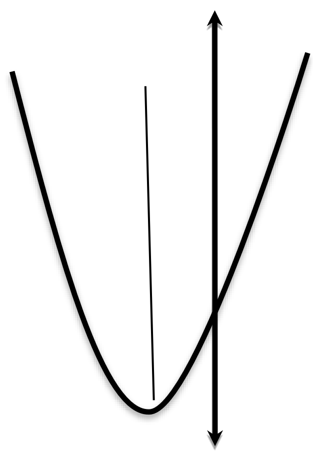
$b^2 - 4ac / -4a$

$= \{(4)^2 - 4.(2).(-6) / -4\ (2)\}$

$= 16 + 48 / -8 = -8$

point puncak $\{(-b/2a), (b^2 - 4ac/-4a)\} = (-1,-8)$

(-3,0)   (1,0)



(0,-6)

(-1,-8)

a. Fungsi Pecahan

Notasi fungsi pecahan sebagai berikut

$$f(x)\,\frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$$

a. Fungsi pecahan linear

$$y = f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

b. Fungsi pecahan kuadrat

$$y = f(X) = \frac{bx^2 + bx + c}{px^2 + qx + r} \text{ dan } y = f(X) = \frac{bx^2 + bx + c}{px + q}$$

- Fungsi Irrasional

  Fungsi yang memiliki variabel dependen yang terletak di bawah tanda akar disebut fungsi Irrasional.

  Contoh : f (x) = $\sqrt{2x^2 - x + 3}$

  1. Fungsi Transenden

     Fungsi transenden merupakan fungsi yang bukan fungsi aljabar.

     - Fungsi Trigometri

       Contoh: f(x) = 2 sin 2x + 8
     - Fungsi Pangkat

       Contoh: f(x) = 16^x
     - Fungsi Log

       Contoh: f(x) = 3log3x

  2. Fungsi Mutlak

     Fungsi yang memiliki cara memasukkan nilai mutlak suatu bilangan real x disebut fungsi Mutlak. Notasikan dengan |x| berikut :

     |x| = $\{x \text{ } jika \text{ } x \geq 0 \; -x \text{ } jika \text{ } x < 0 \}$

  3. Fungsi dengan Parameter

     Fungsi dengan parameter adalah fungsi y = f(x) yang ditampilkan atas persamaan-persamaan : atas t suatu parameter, maka untuk memdapat dari sistem persamaan tersebut adalah atas asumsi y sebagai fungsi komposisi

     $$\{x = f(t) \; y = g\,(t)\}, t \in D$$

C. Menurut Letak Variabelnya

   1. Fungsi Implisit

Fungsi Implisit adalah bertentangan atas fungsi eksplisit. Fungsi implisit memiliki kelainan antar peubah independen dan peubah dependen tidak bisa dikecualikan oleh nyata.

Contoh : f(x,y)= 5y + 6x

2. Fungsi Eksplisit

   Fungsi Eksplisit y atas x merupakan fungsi yang memiliki prosedur f(x) = y dengan mempertemukan antar elemen-elemen di wilayah awalnya dengan akurat 1 elemen di wilayah kadarnya.

   Contoh : y = -9 + 4x

D. Fungsi Khusus

1. Fungsi Identitas

   f : M M atas *f*(*x*) = *x* merupakan fungsi dasar bila *f* melukiskan masing-masing point unsur M ke M saja.

2. Fungsi Konstan

   f: M N. Fungsi *f* merupakan fungsi konstan bila masing-masing unsur M dilukiskan ke 1 unsur N yang sama. Jadi bila x unsur M, maka f(x) = c (konstan)

3. Fungsi Komposisi

   Bila fungsi *m* beraksi atas *a* akan memproduk *m(a)* kemudian dilanjutkan *n* beraksi atas *m(a)* akan memproduk n(m(a)), disebut komposisi n dengan m. Komposisi n dengan m menghasilkan suatu Fungsi, yang dinotasikan *n o m*. Jadi *(n o m)(a) = n(m(a))*

   Fungsi komposisi tidak komutatif n o m ≠ m o n

Misalkan :

k(x) = x - 6 dan l(x)= 2x - 4

Hitung (k o l)(x) = ...?

Penjelasan: (k o l)(x) = k(l(x))

= k(2x-4)

= (2x-4) – 6

$= 2x-10$

Misalkan :

1. $k(x) = 3x + 6$ dan $l(x) = -5 + 2x^2 + 3x$, tentukan (klo g) (x) = ...dan (l o k) (x)?
2. $k(x) = 2x + 1$ dan $l(x) = 3x + 2x^2 + 6$, tentukan (l o k) (x) = ... dan (k o l) (x)?

Jawab:

1. $(k \circ l)(x) = k(l(x))$

$= k(-5+2x^2 + 3x)$

$= 3(-7+2x^2 + 6x) + 6$

$= -21 + 6x^2 + 18x + 6$

$= 6x^2 + 18x – 15$

$(l \circ k)(x) = l(k(x))$

$= l(3x + 6)$

$= -5 + 2 (3x+ 6x)2 + 6$

$= -5 + 6x + 12x2 + 6$

$= 12x2 + 6x + 1$

2. $(l \circ k)(x) = l(k(x))$

$= l(2x + 1)$

$= 3 (2x + 1) + 2(2x + 1)2 + 6$

$= 6x + 3 + 4x2 + 4x + 1 + 6$

$= 4x2 + 10x + 10$

$(k \circ l)(x) = k(l(x))$

$= k(3x + 2x2 + 6)$

$= 2(3x + 2x2 + 6)$

$= 6x + 4x2 + 12$

DAFTAR PUSTAKA

Dale Varbeg, Edwin J Purcel. 2001. *Kalkulus Jilid 1 Edisi Ketujuh.* Bandung: Interaksara.

Moesone, D. 1988. *Kalkulus 1*. Surabaya: Unesa University Press.

Palopo, M. 2020. *Kalkulus Differensial Pendekatan Blended Learning*. Yogyakarta: Deepublish.

Thomas and Finney. 1998. *Calculus and Analytic Geometry, 9thed.* USA: AddisonWesley

Warsoma dan Wono Setyo Budi. 2007. Diktat Kalkulus I. Bandung: ITB

BAB 5

LIMIT FUNGSI BENTUK TAK TENTU

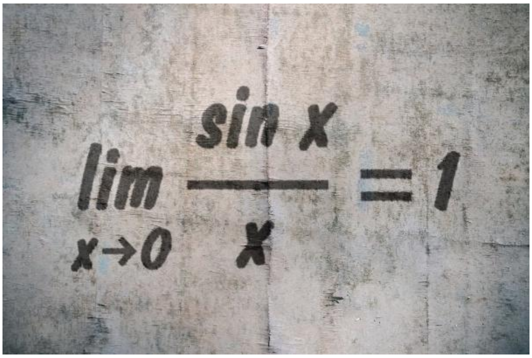
Oleh Dr. Ir. Budi Witjaksana, S.T., M.T., IPU., Asean Eng.

5.1 Pendahuluan

a) Limit fungsi adalah konsep fundamental dalam analisis matematika yang memungkinkan kita untuk memahami perilaku suatu fungsi saat mendekati suatu titik tertentu. Limit berhubungan erat dengan konsep kontinuitas dan deret tak hingga, serta menjadi dasar bagi banyak aspek dalam ilmu matematika dan ilmu lainnya.(Nurwahyuni, 2014)

b) Pengenalan tentang apa itu limit fungsi dan pentingnya dalam analisis matematika.

c) Pengenalan mengenai fungsi bentuk tak tentu dan mengapa mereka merupakan kasus khusus dalam perhitungan limit.



Gambar 5.1 Limit Fungsi
Sumber : (*Limit Fungsi*, n.d.)

Pentingnya Limit Fungsi dalam Analisis Matematik(George B. Thomas, 2017):

1) Menentukan Nilai Fungsi yang Sulit atau Tidak Terdefinisi:
   a) Beberapa fungsi memiliki nilai yang sulit atau bahkan tidak terdefinisi pada titik tertentu.
   b) Dengan konsep limit, kita dapat mendekati nilai fungsi tersebut saat titik yang dicari mendekati titik kontinuitas.
2) Membuktikan Batas dari Deret Tak Hingga:
   a) Banyak deret tak hingga memerlukan perhitungan batas untuk menentukan apakah deret tersebut konvergen atau divergen.
   b) Konsep limit sangat penting dalam membuktikan konvergensi atau divergensi deret.
3) Menentukan Kemiringan dan Garis Singgung dalam Kalkulus:
   a) Dalam ilmu kalkulus, penggunaan konsep limit memungkinkan kita untuk menentukan kemiringan garis singgung pada suatu kurva pada titik tertentu.
   b) Hal ini memungkinkan kita untuk memahami perubahan yang terjadi dalam suatu fungsi pada titik tertentu.

4) Penggunaan dalam Statistik dan Probabilitas:
   a) Konsep limit diimplementasikan dalam bidang statistik dan probabilitas guna menganalisis distribusi data yang mendekati distribusi normal atau untuk menghitung probabilitas suatu kejadian yang jarang terjadi.
5) Membentuk Dasar Kalkulus:
   a) Limit adalah konsep dasar dalam kalkulus, yang merupakan cabang utama dalam analisis matematika.
   b) Memahami limit memungkinkan kita untuk menghitung turunan dan integral, yang menjadi dasar perhitungan dalam ilmu teknik, fisika, dan banyak bidang lainnya.

Limit fungsi dalam analisis matematika tidak hanya menjadi konsep teoritis di dalam buku-buku pelajaran, tetapi juga memiliki penerapan praktis dalam kehidupan sehari-hari. Berikut adalah beberapa contoh bagaimana limit fungsi relevan dalam kehidupan(*Penerapan Limit Fungsi Dalam Kehidupan Sehari - Hari*, n.d.):

a) Keuangan dan Investasi:
   Dalam perencanaan keuangan dan investasi, limit fungsi sangat penting. Misalnya, saat mengevaluasi investasi jangka panjang, kita ingin mengetahui bagaimana nilai portofolio kita berkembang seiring berjalannya waktu. Ini melibatkan perhitungan batas ketika waktu mendekati tak terbatas, sehingga kita dapat memahami potensi keuntungan atau kerugian investasi dalam jangka panjang.

Gambar 5.2 Limit Fungsi Dalam Keuangan dan Investasi
Sumber : (*10 Manfaat Investasi Yang Akan Membuat Hidupmu Lebih Baik*, n.d.)

b) Pembagian Sumber Daya:
Dalam manajemen sumber daya, seperti distribusi air, energi listrik, atau penggunaan jaringan telekomunikasi, limit fungsi berperan penting. Misalnya, perusahaan listrik ingin mengetahui bagaimana permintaan energi berkembang saat mencapai batas maksimum kapasitas jaringan mereka.

c) Lalu Lintas Jalan Raya:
Dalam perencanaan lalu lintas, limit fungsi digunakan untuk memahami bagaimana kepadatan lalu lintas pada jalan raya berubah seiring waktu. Ini membantu dalam menentukan bagaimana jalan raya dan infrastruktur transportasi lainnya harus dirancang dan diatur untuk meminimalkan kemacetan dan waktu perjalanan.

d) Pengembangan Obat dalam Kedokteran:
Dalam farmakologi, limit fungsi memainkan peran penting dalam pengembangan obat-obatan. Misalnya, para ilmuwan ingin mengetahui bagaimana konsentrasi obat dalam tubuh manusia berubah seiring waktu untuk

mengoptimalkan dosis yang diberikan dan mencegah efek samping yang berbahaya.

e) Desain Rangkaian Elektronik:
Dalam rekayasa elektronik, limit fungsi membantu dalam merancang rangkaian elektronik yang optimal. Misalnya, dalam rangkaian yang memproses sinyal analog atau digital, perlu dipastikan bahwa sinyal yang diproses tetap berada dalam rentang aman dan tidak terlalu berubah mendekati batas.

f) Perancangan Struktur Bangunan:
Dalam teknik sipil, limit fungsi digunakan dalam perancangan struktur bangunan dan jembatan. Mengidentifikasi batas beban maksimum yang dapat ditahan oleh struktur membantu dalam memastikan keamanan dan keandalan struktur tersebut.

Semua contoh di atas menunjukkan bagaimana konsep limit fungsi relevan dan diterapkan dalam kehidupan nyata. Penggunaan limit dalam berbagai aspek kehidupan membantu dalam pengambilan keputusan yang tepat, perencanaan yang baik, dan peningkatan kualitas sistem yang ada.

5.2 Pengenalan Limit Fungsi Bentuk Tak Tentu

Definisi dan notasi limit fungsi.

1) Definisi Limit Fungsi:
Limit fungsi adalah istilah matematika yang digunakan untuk menggambarkan perilaku suatu fungsi ketika variabel independennya mendekati nilai tertentu. Secara formal, limit fungsi f(x) saat x mendekati nilai c didefinisikan sebagai berikut:
Jika dalam setiap jarak terbuka yang mencakup titik c, kecuali mungkin di titik c itu sendiri, terdapat suatu nilai

$\delta > 0$ sedemikian rupa sehingga apabila x memenuhi $0 < |x - c| < \delta$, maka nilai f(x) akan semakin mendekati nilai L.

2) Notasi Limit Fungsi:

Notasi yang umum digunakan untuk menyatakan limit fungsi adalah:

lim (x → c) f(x) = L

Dalam konteks ini, lim x → c f(x) = L menyatakan bahwa ketika variabel x mendekati nilai c, maka fungsi f(x) akan mendekati nilai L sebagai limitnya. Lebih tepatnya, untuk setiap interval terbuka yang mengandung c, kecuali mungkin di c itu sendiri, terdapat nilai $\delta > 0$ sehingga untuk setiap x yang memenuhi $0 < |x - c| < \delta$, maka f(x) mendekati nilai L. Dengan kata lain, kita dapat membuat f(x) semakin mendekati nilai L dengan memilih x yang cukup dekat dengan c.

Berikut adalah beberapa bentuk tak tentu yang umum dalam perhitungan limit fungsi:

1) Bentuk 0/0:

Bentuk ini muncul ketika kita mendekatkan nilai variabel ke titik tertentu, dan baik pembilang maupun penyebut dari fungsi tersebut akan semakin mendekati nol. Sebagai contoh, kita dapat mengamati fungsi lim (x → 1) (x^2 - 1) / (x - 1). Saat nilai x mendekati 1, baik pembilang (x^2 - 1) maupun penyebut (x - 1) semakin mendekati nol, sehingga bentuknya menjadi 0/0.

2) Bentuk ∞/∞:

Bentuk ini muncul ketika kita mendekatkan nilai variabel ke titik tertentu, dan baik pembilang maupun penyebut dari fungsi tersebut akan semakin mendekati tak hingga. Sebagai contoh, perhatikan fungsi lim (x → ∞) x^2 / x. Ketika nilai x mendekati tak hingga, baik pembilang (x^2) maupun penyebut (x) semakin mendekati tak hingga, sehingga bentuknya menjadi ∞/∞.

3) Bentuk $0 * \infty$:

Bentuk ini muncul ketika kita memiliki dua fungsi, satu mendekati nol dan yang lain mendekati tak hingga, dan hasil perhitungan keduanya mengarah ke bentuk tak tentu $0 * \infty$. Contohnya adalah lim $(x \to 0)$ $x * (1/x)$. Ketika x mendekati 0, pertama kali x mendekati nol dan kedua, $1/x$ mendekati tak hingga, sehingga menghasilkan bentuk $0 * \infty$.

4) Bentuk 1^∞:

Bentuk ini muncul ketika kita memiliki limit dari suatu fungsi yang memiliki bentuk seperti 1^∞, di mana pangkat variabel mendekati tak hingga dan basisnya mendekati 1. Sebagai contoh, perhatikan lim $(x \to \infty)$ $(1 + 1/x)^x$. Ketika nilai x mendekati tak hingga, basis $(1 + 1/x)$ mendekati 1 dan pangkatnya x mendekati tak hingga, sehingga menghasilkan bentuk 1^∞.

Contoh-contoh awal untuk mengilustrasikan konsep limit fungsi bentuk tak tentu.

Berikut adalah beberapa contoh awal untuk mengilustrasikan konsep limit fungsi bentuk tak tentu(*Tujuh Bentuk Tak Tentu Dalam Matematika*, n.d.):

a) Contoh 1: Limit 0/0

Misalkan menganalisis fungsi $f(x) = (x^2 - 4) / (x - 2)$ saat x mendekati 2, kita dihadapkan pada bentuk tak tentu 0/0. Untuk menyelesaikan masalah ini, kita dapat menggunakan metode faktorisasi untuk menyederhanakan fungsi tersebut.

Dengan melakukan faktorisasi pada $x^2 - 4$, kita dapat menyatakan bahwa $x^2 - 4$ dapat difaktorkan menjadi $(x + 2)(x - 2)$. Kemudian, kita dapat menyederhanakan fungsi $f(x)$ dengan membatalkan $(x - 2)$ pada pembilang dan penyebut, karena $x - 2$ merupakan akar dari $x^2 - 4$.

Hasil dari proses penyederhanaan ini akan menghasilkan bentuk baru untuk $f(x)$ yang lebih sederhana, yaitu $f(x) = (x + 2)$.

Dengan demikian, ketika x mendekati nilai 2, nilai limit dari fungsi $f(x)$ adalah:

lim (x → 2) [(x^2 - 4) / (x - 2)] = lim (x → 2) [(x + 2)]

Kini, kita dapat langsung menggantikan x dengan 2 untuk mendapatkan hasil akhir:

lim (x → 2) [(x^2 - 4) / (x - 2)] = 2 + 2 = 4

Jadi, nilai limit $f(x)$ saat x mendekati 2 adalah 4.

b) Contoh 2: Limit ∞/∞

Misalkan menganalisis fungsi g(x) = (2x^3 + 3x^2) / (4x^3 - 5x^2) saat x mendekati tak hingga (∞), kita dihadapkan pada bentuk tak tentu ∞/∞. Untuk menyelesaikan masalah ini, kita dapat menggunakan metode pembagian setiap suku dengan x^3 pada pembilang dan penyebut.

Dengan melakukan pembagian setiap suku dengan x^3, kita dapat menyatakan bahwa (2x^3 + 3x^2) / (4x^3 - 5x^2) dapat disederhanakan menjadi (2/x + 3/x^2) / (4 - 5/x).

Ketika x mendekati tak hingga, suku-suku yang mengandung 1/x akan mendekati nol, sehingga kita dapat mengabaikannya. Sehingga limit dari fungsi g(x) saat x mendekati tak hingga (∞) adalah:

lim (x → ∞) [(2 + 3/x) / (4 - 5/x)] = 2 / 4 = 0.5

Jadi, nilai limit dari fungsi g(x) saat x mendekati tak hingga (∞) adalah 0.5.

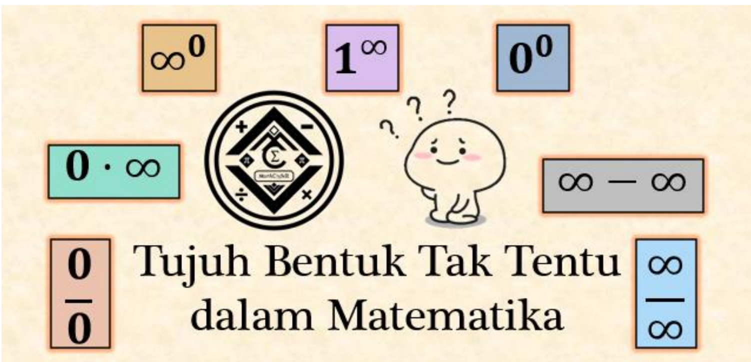
c) Contoh 3: Limit 1^∞

Misalkan kita memiliki fungsi h(x) = (1 + 1/x)^x dan mencoba menghitung limit h(x) saat x mendekati tak hingga (∞), kita akan mendapatkan bentuk 1^∞ yang sulit ditentukan nilai pastinya. Namun, terdapat suatu nilai khusus yang dapat digunakan untuk menyelesaikan limit ini, yaitu bilangan Euler yang biasanya dilambangkan dengan huruf "e".

Nilai limit dari h(x) saat x mendekati tak hingga adalah e, yang memiliki nilai sekitar 2.71828. Kita dapat menyatakan limit tersebut dengan persamaan matematis:

$\lim (x \to \infty) [(1 + 1/x)^x] = e$

Bilangan Euler, e, adalah suatu bilangan irasional yang memiliki banyak aplikasi dalam berbagai bidang ilmu, termasuk matematika, fisika, dan statistik. Dalam kasus ini, e muncul sebagai hasil dari menghitung limit fungsi h(x) saat x mendekati tak hingga (∞).



Gambar 5.2 Tujuh Bentuk Tak Tentu dalam Matematika

Sumber :(*Tujuh Bentuk Tak Tentu Dalam Matematika*, n.d.)

5.3 Bentuk Tak Tentu yang Umum

Mengidentifikasi bentuk tak tentu paling umum, seperti 0/0, ∞/∞, 1^∞, dan sebagainya.

Berikut adalah beberapa contoh awal untuk mengilustrasikan konsep limit fungsi bentuk tak tentu, yaitu:

a) Contoh 1: Limit 0/0

Misalkan bentuk tak tentu (0/0) saat menghitung limit fungsi $f(x) = (x^2 - 4) / (x - 2)$ saat x mendekati 2, langkah-langkah yang dapat diambil adalah sebagai berikut. Pertama, faktorisasi fungsi $(x^2 - 4)$ menjadi $(x + 2)(x - 2)$.

Setelah itu, kita dapat menyederhanakan ulang fungsi dengan membatalkan (x - 2) pada pembilang dan penyebut sehingga menjadi lim (x → 2) [(x + 2)].

Dengan menggantikan nilai x dengan 2 dalam fungsi yang disederhanakan tersebut, kita akan mendapatkan hasil akhir 4. Oleh karena itu, nilai limit f(x) saat x mendekati 2 adalah 4.

Pada intinya, ketika kita menghadapi bentuk tak tentu dalam menghitung limit suatu fungsi, faktorisasi dan penyederhanaan dapat membantu kita mencari solusi akhirnya. Dalam kasus ini, proses tersebut membawa kita kepada jawaban bahwa limit f(x) saat x mendekati 2 adalah 4.

b) Contoh 2: Limit ∞/∞

Misalkan menghitung limit fungsi g(x) = (2x^3 + 3x^2) / (4x^3 - 5x^2) saat x mendekati tak hingga (∞), kita menghadapi bentuk tak tentu (∞/∞). Untuk menyelesaikan bentuk tak tentu ini, langkah pertama adalah dengan membagi setiap suku dengan x^3 pada pembilang dan penyebut.

Setelah disederhanakan, fungsi menjadi lim (x → ∞) [(2 + 3/x) / (4 - 5/x)]. Ketika x mendekati tak hingga, suku-suku yang mengandung 1/x akan mendekati nol.

Akibatnya, limit dari fungsi tersebut menjadi lim (x → ∞) [(2 + 3/x) / (4 - 5/x)]. Kita dapat menggantikan nilai x dengan tak hingga (∞) dalam fungsi tersebut untuk mendapatkan hasil akhir. Hasilnya adalah 2 / 4 = 0.5.

Jadi, nilai limit g(x) saat x mendekati tak hingga (∞) adalah 0.5.

c) Contoh 3: Limit 1^∞

Misalkan mencari nilai limit dari fungsi h(x) = (1 + 1/x)^x saat x mendekati tak hingga (∞), kita harus menghadapi bentuk 1^∞ yang umumnya tidak dapat ditentukan langsung. Namun, kita dapat menggunakan limit yang sudah diketahui untuk menyelesaikan masalah ini.

Bilangan Euler (e) nilainya sekitar 2.71828. Nilai ini sangat penting dalam analisis matematika dan ilmu pengetahuan alam. Untuk melihat bagaimana e muncul dalam kasus ini, mari kita lanjutkan dengan menghitung limit h(x) saat x mendekati tak hingga (∞).

lim (x → ∞) [(1 + 1/x)^x]

Saat x mendekati tak hingga, kita memiliki fraksi 1/x yang mendekati nol. Oleh karena itu, kita dapat mengasumsikan bahwa (1 + 1/x) mendekati (1 + 0) = 1. Dengan kata lain, kita mendekati bentuk (1^∞).

Untuk menyelesaikan bentuk tak tentu ini, kita gunakan limit yang sudah diketahui, yaitu:

lim (x → ∞) [(1 + 1/x)^x] = e

Sehingga, nilai limit h(x) saat x mendekati tak hingga (∞) adalah e, yang memiliki nilai sekitar 2.71828. Dengan begitu, kita telah berhasil menemukan nilai limit fungsi h(x) menggunakan limit yang sudah dikenal, yaitu e, sebagai hasil dari bentuk 1^∞.

Solusi dan metode penyelesaian untuk setiap bentuk tak tentu.

Berikut adalah solusi dan metode penyelesaian untuk setiap bentuk tak tentu yang umum:

a) Bentuk 0/0:

Metode Penyelesaian: Faktorkan pembilang dan penyebut untuk mencoba membatalkan faktor-faktor yang sama, sehingga menghilangkan bentuk tak tentu.

Contoh: Misalkan kita memiliki lim (x → 2) [(x^2 - 4) / (x - 2)]. Kita dapat memfaktorkan pembilang menjadi (x + 2)(x - 2), karena (x^2 - 4) merupakan perbedaan kuadrat yang dapat difaktorkan dengan rumus a^2 - b^2 = (a + b)(a - b). Setelah difaktorkan, bentuk limit menjadi lim (x → 2) [(x + 2)(x - 2) / (x - 2)]. Kemudian, kita bisa menyederhanakan dengan membatalkan (x - 2) pada pembilang dan penyebut, sehingga kita mendapatkan bentuk tak tentu 0/0. Untuk menentukan nilai limit, kita dapat menyederhanakan lagi. Pada bentuk tak tentu ini, faktor (x - 2) dapat dibatalkan, sehingga kita memiliki lim (x → 2) (x + 2). Selanjutnya, substitusi nilai x = 2 ke dalam (x + 2), maka limitnya akan menjadi lim (x → 2) (2 + 2) = 4.

b) Bentuk ∞/∞:
Metode Penyelesaian: Dalam setiap suku pada pembilang dan penyebut dengan pangkat tertinggi dari variabel, kita dapat menghadapi situasi di mana bentuknya menjadi tak tentu, yakni berupa 0/0 atau ∞/∞. Namun, jangan khawatir, karena masalah ini dapat diatasi dengan lebih mudah.
Contoh: Misalkan kita memiliki lim (x → ∞) [(2x^3 + 3x^2) / (4x^3 - 5x^2)], kita bisa mengatasi bentuk tak tentunya dengan membagi setiap suku dengan pangkat tertinggi x^3. Hasilnya adalah lim (x → ∞) [(2 + 3/x) / (4 - 5/x)]. Ketika x mendekati tak hingga (x → ∞), suku-suku yang mengandung 1/x, yaitu 3/x dan -5/x, akan mendekati nol. Sehingga, kita dapat menyederhanakan bentuknya menjadi lim (x → ∞) [(2 + 0) / (4 - 0)], yang kemudian menjadi lim (x → ∞) [2 / 4]. Dengan membagi kedua angka tersebut, kita mendapatkan nilai limitnya, yaitu 0.5.

c) Bentuk 1^∞:
Metode Penyelesaian: Konversi bentuk 1^∞ menjadi bentuk e^∞ dan gunakan limit yang sudah diketahui lim (x → ∞) (1 + 1/x)^x = e.
Contoh: Misalkan kita punya lim (x → ∞) [(1 + 1/x)^x]. Kita ketahui bahwa lim (x → ∞) [(1 + 1/x)^x] = e, sehingga nilai limitnya adalah e.

d) Bentuk ∞ - ∞:

Metode Penyelesaian: Coba pangkas dan gabungkan suku-suku yang mengandung tak hingga, sehingga mendapatkan bentuk tak tentu yang lebih mudah.

Contoh: Misalkan kita punya lim (x → ∞) [x^2 - x]. Pangkas suku yang mengandung tak hingga, sehingga mendapatkan bentuk tak tentu dalam bentuk ∞ - ∞. Kemudian, kita bisa mencoba untuk menyederhanakan lagi atau menggunakan metode lain yang sesuai untuk menghitung limitnya.

e) Bentuk 0 * ∞:

Metode Penyelesaian: Dalam kasus lim (x → a) [f(x) * g(x)], ketika salah satu fungsi mendekati nol dan yang lainnya mendekati tak hingga, kita dapat menyederhanakan fungsi sebelum menghitung limitnya.

Contoh: Misalkan x mendekati nol dan 1/x mendekati tak hingga, kita dapat menyederhanakan fungsi sebelum menghitung limitnya. Dalam kasus lim (x → 0) [x * (1/x)], x * (1/x) sama dengan 1. Oleh karena itu, nilai limitnya adalah 1.

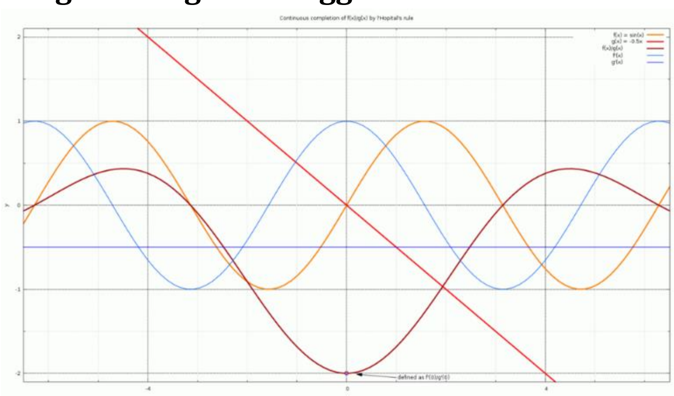
5.4 Penyelesaian Limit Fungsi Bentuk Tak Tentu Pendekatan L'Hôpital dan kapan harus menggunakannya.

Metode L'Hôpital merupakan sebuah pendekatan yang digunakan untuk menangani limit fungsi yang berbentuk tak tentu 0/0 atau ∞/∞. Dalam metode ini, aturan turunan dimanfaatkan untuk menghitung limit dengan melakukan turunan pada pembilang dan penyebut secara terpisah, lalu menghitung limit baru dari hasil turunan tersebut. Metode ini merupakan sebuah alat yang sangat berguna dalam menyelesaikan limit yang sulit atau rumit, terutama ketika limit tersebut menghasilkan bentuk tak tentu. Berkat penerapan aturan turunan, limit yang sebelumnya sulit atau bahkan tidak dapat dihitung, menjadi lebih terjangkau untuk dipecahkan(*L'Hôpital's Rule*, n.d.).

Kapan Harus Menggunakan Pendekatan L'Hôpital:

Pendekatan L'Hôpital diimplementasikan jika bentuk tak tentu 0/0 atau ∞/∞ dalam perhitungan limit. Jika limit tidak berada dalam bentuk ini, maka pendekatan L'Hôpital tidak berlaku.

Langkah-langkah Penggunaan Pendekatan L'Hôpital:



Gambar 5.4 Hopital Rule
Sumber : (*Hopital Sin x by -0.5x*, n.d.)

1) Mengidentifikasi Bentuk Tak Tentu: limit fungsi menunjukan 0/0 atau ∞/∞.
2) Hitung Turunan Pembilang dan Penyebut: Ambil turunan pembilang dan turunan penyebut secara terpisah.
3) Evaluasi Limit Baru: Hitung limit dari hasil turunan pembilang dan penyebut.
4) Bandingkan dengan Bentuk Awal: Jika limit baru masih berada dalam bentuk tak tentu 0/0 atau ∞/∞, ulangi langkah 2 dan 3 sampai limit mencapai nilai yang terdefinisi.

Contoh Penggunaan Pendekatan L'Hôpital:

Contoh 1: Misalkan kita ingin mencari limit dari fungsi f(x) = (sin x) / x saat x mendekati 0.

lim (x → 0) [(sin x) / x]

Ketika langsung menggantikan x dengan 0, kita mendapatkan bentuk tak tentu 0/0. Karena bentuk ini sesuai dengan syarat penggunaan L'Hôpital, kita dapat menggunakan pendekatan ini.

Hitung turunan pembilang dan penyebut:

turunan (sin x) = cos x

turunan x = 1

Evaluasi limit baru:

lim (x → 0) [cos x / 1] = cos 0 = 1

Jadi, nilai limit f(x) saat x mendekati 0 adalah 1.

Contoh 2: Misalkan kita ingin mencari limit dari fungsi g(x) = (e^x - 1) / x saat x mendekati 0.

lim (x → 0) [(e^x - 1) / x]

Ketika langsung menggantikan x dengan 0, kita mendapatkan bentuk tak tentu 0/0. Karena bentuk ini sesuai dengan syarat penggunaan L'Hôpital, kita dapat menggunakan pendekatan ini.

Hitung turunan pembilang dan penyebut:

turunan (e^x - 1) = e^x

turunan x = 1

Evaluasi limit baru:

lim (x → 0) [e^x / 1] = e^0 = 1

Jadi, nilai limit g(x) saat x mendekati 0 adalah 1.

Pendekatan L'Hôpital memang merupakan alat yang sangat berguna dalam menyelesaikan limit fungsi yang memiliki bentuk tak tentu 0/0 atau ∞/∞. Namun, seperti yang Anda sebutkan, penting untuk mengenali situasi di mana pendekatan ini berlaku dan ketika harus menggunakan teknik lain ketika limit berada dalam bentuk tak tentu lainnya.

Teorema Sandwich untuk menentukan limit yang sulit.
Pernyataan Teorema Sandwich:

Berdasarkan asumsi bahwa f(x), g(x), dan h(x) adalah tiga fungsi dengan domain yang sama, kecuali mungkin di titik c, dan berlaku f(x) ≤ g(x) ≤ h(x) untuk semua nilai x dalam domain tersebut, kecuali mungkin di titik c. Jika kedua limit lim (x → c) f(x) dan lim (x → c) h(x) ada dan sama, dan keduanya sama dengan L, maka kita dapat menyimpulkan bahwa limit lim (x → c) g(x) juga ada dan sama dengan L. Dalam kata lain, jika f(x) mendekati L ketika x mendekati c dan h(x) juga mendekati L saat x mendekati c, serta g(x) selalu berada di antara f(x) dan h(x) kecuali mungkin di titik c, maka g(x) juga akan mendekati L ketika x mendekati c. Oleh karena itu, limit lim (x → c) g(x) adalah L.

Notasi Matematika:
Jika f(x) ≤ g(x) ≤ h(x) dan lim (x → c) f(x) = lim (x → c) h(x) = L, maka lim (x → c) g(x) = L.

Penerapan Teorema Sandwich:

Teorema Sandwich sangat bermanfaat ketika kita ingin mengetahui limit dari fungsi yang sulit dihitung atau memiliki bentuk tak tentu yang sulit dipecahkan. Dengan menggunakan dua fungsi yang lebih mudah untuk dihitung dan yang membatasi fungsi sulit tersebut, kita dapat menyimpulkan limit fungsi sulit tanpa harus menghitungnya secara langsung.

Contoh Penerapan Teorema Sandwich:

Misalkan limit dari fungsi f(x) = sin(x)/x saat x mendekati 0, kita menghadapi bentuk tak tentu 0/0 yang sulit dihitung secara langsung. Namun, kita dapat menggunakan informasi yang telah diketahui mengenai limit dari fungsi sin(x) dan fungsi x saat x mendekati 0.

Fungsi sin(x) diketahui memiliki limit saat x mendekati 0, yaitu lim (x → 0) sin(x) = 0. Selain itu, fungsi x juga memiliki limit saat x mendekati 0, yaitu lim (x → 0) x = 0. Karena f(x) merupakan perbandingan antara sin(x) dan x, kita dapat menggunakan Teorema Sandwich untuk menyelesaikan limit f(x) saat x mendekati 0. Teorema Sandwich, atau sering disebut juga sebagai Teorema Pencakar Langit, memungkinkan kita untuk membatasi nilai suatu fungsi yang sulit dihitung dengan memanfaatkan dua fungsi perbandingan yang lebih mudah.

Dengan memanfaatkan Teorema Sandwich, kita dapat menyatakan bahwa:

$0 \leq |\sin(x)/x| \leq |x/x| = 1$

Karena kita tahu bahwa lim (x → 0) 0 = 0 dan lim (x → 0) 1 = 1, maka berdasarkan Teorema Sandwich, limit dari fungsi f(x) saat x mendekati 0 juga harus berada di antara 0 dan 1:

$0 \leq \lim (x \to 0) |\sin(x)/x| \leq 1$

Sebelumnya, kita telah membuktikan bahwa lim (x → 0) sin(x)/x = 0. Dengan demikian, kita dapat menyimpulkan bahwa limit dari fungsi f(x) saat x mendekati 0 adalah 0:

$\lim (x \to 0) \sin(x)/x = 0$

Selain Pendekatan L'Hôpital dan Teorema Sandwich, ada beberapa metode alternatif lain yang dapat digunakan untuk mengevaluasi limit fungsi dalam bentuk tak tentu. Berikut adalah beberapa metode tersebut:

1) Simplifikasi Aljabar:
   Dalam beberapa kasus, kita dapat menyederhanakan ekspresi aljabar secara manual atau menggunakan identitas trigonometri, sifat limit, atau faktorisasi untuk mengubah bentuk tak tentu menjadi bentuk yang dapat

dihitung secara langsung. Sebagai contoh, jika kita memiliki limit dalam bentuk tak tentu 0^0, kita dapat mengubahnya menjadi bentuk 1 dengan mengetahui bahwa 0^0 = 1.

2) Pendekatan Nilai Spesifik:
Angka numerik yang tepat dapat digunakan untuk mendekati nilai batas dalam beberapa keadaan. Jika kita memiliki batas dengan bentuk tak tentu (0/0), misalnya, kita dapat mendekati nilai batas yang sebenarnya dengan mengganti nilai yang lebih dekat dengannya, seperti 0,1, 0,01, 0,001, dan seterusnya, untuk mengamati nilai limt.

3) Pendekatan Trigonometri:
Limit yang menggunakan fungsi trigonometri dapat diekspresikan dengan cara yang lebih mudah dengan menggunakan identitas trigonometri atau konversi trigonometri. Sebagai contoh, identitas trigonometri lim (x 0) sin(x)/x = 1 dapat diterapkan pada limit bentuk tak tentu sin(x)/x saat x mendekati 0.

4) Substitusi Variabel:
Dalam beberapa situasi, kita dapat mempermudah bentuk dari suatu limit dengan menggantikan variabel baru. Contohnya, jika kita memiliki limit dalam bentuk tak tentu (√x - 1) / (x - 1) saat x mendekati 1, kita dapat menggunakan substitusi y = √x untuk mendapatkan limit baru saat y mendekati 1. Dengan melakukan substitusi ini, kita dapat mengubah bentuk limit menjadi yang lebih sederhana dan lebih mudah untuk dihitung.

5) Pembagian Polinomial:
Pembagian polinomial dapat digunakan untuk menyederhanakan bentuk tak tentu dari limit menggunakan polinomial. Limit dari bentuk tak tentu (x3 - 8) / (x - 2) saat x mendekati 2 dapat langsung dihitung dengan pembagian polinomial atau faktorisasi.

5.5 Limit Fungsi Trigonometri

Perhitungan limit untuk fungsi trigonometri.

Perhitungan limit untuk fungsi trigonometri dapat melibatkan berbagai bentuk tak tentu, seperti 0/0, ∞/∞, 1^∞, dan sebagainya. Berikut adalah beberapa contoh perhitungan limit untuk fungsi trigonometri:

Contoh 1: Limit sin(x)/x saat x mendekati 0

Untuk menghitung limit ini, kita menggunakan Pendekatan L'Hôpital karena bentuknya adalah 0/0.

lim (x → 0) (sin(x)/x)

Dalam bentuk ini, jika langsung menggantikan x dengan 0, kita mendapatkan 0/0. Gunakan Pendekatan L'Hôpital:

Hitung turunan pembilang dan penyebut:

turunan (sin(x)) = cos(x)

turunan (x) = 1

Evaluasi limit baru:

lim (x → 0) (cos(x)/1) = cos(0) = 1

Jadi, nilai limit sin(x)/x saat x mendekati 0 adalah 1.

Contoh 2: Limit (1 - cos(x))/x^2 saat x mendekati 0

Untuk mencari nilai limit dari persamaan (1 - cos(x))/x^2 saat x mendekati 0, kita perlu melakukan beberapa langkah perhitungan. Pertama, kita dapat menggunakan identitas trigonometri 1 - cos(x) = 2sin^2(x/2) untuk mengubah bentuk persamaan tersebut:

lim (x → 0) ((1 - cos(x))/x^2) = lim (x → 0) (2sin^2(x/2)/x^2)

Selanjutnya, kita perlu menggunakan identitas trigonometri sin(x)/x = 1 untuk mengubah bentuk sin^2(x/2)/x^2:

lim (x → 0) (2(sin(x/2)/(x/2))^2/(x^2)) = lim (x → 0) (2(1)^2/(x^2))

Sekarang kita dapat menyederhanakan persamaan tersebut:

lim (x → 0) (2(1)^2/(x^2)) = lim (x → 0) (2/x^2)

Ketika x mendekati 0, x^2 mendekati 0 pula, sehingga pembilang 2 dan penyebut x^2 sama-sama menuju ke nol. Kita mendapatkan bentuk tak tentu 2/0, yang merupakan bentuk tak hingga (∞).

Jadi, nilai limit dari (1 - cos(x))/x^2 saat x mendekati 0 adalah tak hingga (∞).

Contoh 3: Limit tan(x)/x saat x mendekati 0

Untuk menghitung limit ini, kita juga menggunakan Pendekatan L'Hôpital karena bentuknya adalah 0/0.

lim (x → 0) (tan(x)/x)

Dalam bentuk ini, jika langsung menggantikan x dengan 0, kita mendapatkan 0/0. Gunakan Pendekatan L'Hôpital:

Hitung turunan pembilang dan penyebut:

turunan (tan(x)) = sec^2(x)

turunan (x) = 1

Evaluasi limit baru:

lim (x → 0) (sec^2(x)/1) = sec^2(0) = 1

Jadi, nilai limit tan(x)/x saat x mendekati 0 adalah 1.

Perhitungan limit untuk fungsi trigonometri dapat melibatkan berbagai teknik, seperti Pendekatan L'Hôpital, simplifikasi aljabar, dan penggunaan identitas trigonometri. Penting untuk memahami sifat-sifat fungsi trigonometri dan teknik-teknik perhitungan limit untuk menyelesaikan limit dengan akurat.

Penyelesaian limit bentuk tak tentu menggunakan trigonometri.

Berikut adalah beberapa contoh penyelesaian limit bentuk tak tentu melalui implementasi trigonometri:

Contoh 1: Limit (sin(x) / x) saat x mendekati 0

Kita telah menghitung limit ini sebelumnya. Menggunakan Pendekatan L'Hôpital:

lim (x → 0) (sin(x) / x)

Dalam bentuk ini, jika langsung menggantikan x dengan 0, kita mendapatkan bentuk tak tentu 0/0. Gunakan Pendekatan L'Hôpital:

Hitung turunan pembilang dan penyebut:

turunan (sin(x)) = cos(x)

turunan (x) = 1

Evaluasi limit baru:

lim (x → 0) (cos(x) / 1) = cos(0) = 1

Jadi, nilai limit (sin(x) / x) saat x mendekati 0 adalah 1.

Contoh 2: Limit (tan(x) / x) saat x mendekati 0

Kita telah menghitung limit ini sebelumnya. Menggunakan Pendekatan L'Hôpital:

lim (x → 0) (tan(x) / x)

Dalam bentuk ini, jika langsung menggantikan x dengan 0, kita mendapatkan bentuk tak tentu 0/0. Gunakan Pendekatan L'Hôpital:

Hitung turunan pembilang dan penyebut:

turunan (tan(x)) = sec^2(x)

turunan (x) = 1

Evaluasi limit baru:

lim (x → 0) (sec^2(x) / 1) = sec^2(0) = 1

Jadi, nilai limit (tan(x) / x) saat x mendekati 0 adalah 1.

Contoh 3: Limit (1 - cos(x)) saat x mendekati 0

Kita sudah sebelumnya mengevaluasi limit ini dengan menggunakan identitas trigonometri. Mari kita ulangi prosesnya:

Ketika kita menghitung limit (x → 0) dari (1 - cos(x)), kita awalnya mendapatkan bentuk tak tentu 0/0. Oleh karena itu, kita akan menggunakan identitas trigonometri 1 - cos(x) = 2sin^2(x/2):

lim (x → 0) (1 - cos(x)) = lim (x → 0) (2sin^2(x/2))

Selanjutnya, kita akan menggunakan identitas trigonometri sin(x)/x = 1, yang memungkinkan kita untuk menghilangkan x/2 di dalam fungsi:

lim (x → 0) (2sin^2(x/2)) = lim (x → 0) (2(sin(x/2) / (x/2))^2)

Kemudian, kita evaluasi fungsi pada x = 0 dengan menggantikan x dengan 0:

lim (x → 0) (2(sin(x/2) / (x/2))^2) = lim (x → 0) (2(1)^2)

Dan terakhir, kita mendapatkan hasil limit:

lim (x → 0) (2(1)^2) = lim (x → 0) 2 = 2

Jadi, nilai limit (1 - cos(x)) saat x mendekati 0 adalah 2.

Contoh 4: Limit (x - sin(x)) saat x mendekati 0

Kita akan mencoba menyelesaikan limit ini dengan menggunakan pendekatan trigonometri:

lim (x → 0) (x - sin(x))

Kita tahu bahwa sin(x) adalah fungsi periodik dengan periode 2π dan memiliki nilai sin(0) = 0. Ketika x mendekati 0, maka sin(x) juga mendekati 0. Dengan demikian, kita bisa melakukan pendekatan x - sin(x) sebagai berikut:

x - sin(x) ≈ x - 0 = x

Ketika x mendekati 0, maka x juga mendekati 0. Jadi, nilai limit (x - sin(x)) saat x mendekati 0 adalah 0.

5.6 Limit Fungsi Eksponensial dan Logaritma

Penerapan limit pada fungsi eksponensial dan logaritma.

Perhitungan limit pada fungsi eksponensial dan logaritma dapat melibatkan berbagai bentuk tak tentu, seperti 0^0, ∞^0, 0 * ∞, dan sebagainya. Berikut adalah beberapa contoh penerapan limit pada fungsi eksponensial dan logaritma:

Contoh 1: Limit (e^x) saat x mendekati 0

Untuk menghitung limit ini, kita perlu menggunakan definisi bilangan e sebagai bilangan Euler yang mendekati 2.71828.

lim (x → 0) (e^x)

Ketika langsung menggantikan x dengan 0, kita mendapatkan 0^0, yang merupakan bentuk tak tentu. Namun, limit dari e^x saat x mendekati 0 adalah nilai e itu sendiri:

lim (x → 0) (e^x) = e^0 = 1

Jadi, nilai limit (e^x) saat x mendekati 0 adalah 1.

Contoh 2: Limit (ln(x)) saat x mendekati 1

Untuk menghitung limit ini, kita perlu menggunakan definisi logaritma natural atau ln(x) sebagai kebalikan dari fungsi eksponensial e^x.

lim (x → 1) (ln(x))

Ketika langsung menggantikan x dengan 1, kita mendapatkan ln(1) yang merupakan bentuk tak tentu -∞/∞. Namun, limit dari ln(x) saat x mendekati 1 adalah nilai ln(1) yang sama dengan 0:

lim (x → 1) (ln(x)) = ln(1) = 0

Jadi, nilai limit (ln(x)) saat x mendekati 1 adalah 0.

Contoh 3: Limit (x * e^(-x)) saat x mendekati ∞

Untuk menghitung limit ini, kita perlu menggunakan teknik pemangkatan dan nilai limit yang sudah diketahui.

lim (x → ∞) (x * e^(-x))

Ketika langsung menggantikan x dengan ∞, kita mendapatkan bentuk tak tentu ∞ * 0. Dalam kasus ini, kita perlu menggunakan teknik "0 * ∞" untuk menyelesaikan limit ini.

Untuk mengatasi limit ini, kita dapat menggunakan teknik pemangkatan:

x * e^(-x) = x * (1 / e^x)

Ketika x mendekati ∞, nilai e^x mendekati tak hingga (∞) sehingga 1/e^x mendekati 0. Kita mendapatkan bentuk tak tentu 0 * ∞. Namun, kita tahu bahwa limit dari x saat x mendekati ∞ adalah ∞, dan limit dari 1/e^x saat x mendekati ∞ adalah 0.

Sehingga, nilai limit (x * e^(-x)) saat x mendekati ∞ adalah:

lim (x → ∞) (x * e^(-x)) = ∞ * 0 = 0

Jadi, nilai limit (x * e^(-x)) saat x mendekati ∞ adalah 0.

Penyelesaian limit bentuk tak tentu yang melibatkan eksponensial dan logaritma.

Berikut adalah beberapa contoh penyelesaian limit bentuk tak tentu yang melibatkan fungsi eksponensial dan logaritma:

Contoh 1: Limit (1^∞)

Untuk menghitung limit ini, kita perlu menggunakan teknik pemangkatan. Bentuk ini adalah 1^∞ yang tidak terdefinisi secara langsung.

lim (x → 0) (1^x)

Ketika langsung menggantikan x dengan 0, kita mendapatkan bentuk tak tentu 1^0. Kita tahu bahwa 1^0 = 1. Sehingga, limit dari 1^x saat x mendekati 0 adalah 1.

Contoh 2: Limit (e^x) saat x mendekati ∞

Kita telah menghitung limit ini sebelumnya. Ketika x mendekati ∞, nilai e^x juga mendekati tak hingga (∞).

lim (x → ∞) (e^x) = ∞

Jadi, nilai limit (e^x) saat x mendekati ∞ adalah tak hingga (∞).

Contoh 3: Limit (ln(x)) saat x mendekati 0

Kita telah menghitung limit ini sebelumnya. Ketika x mendekati 0, nilai ln(x) mendekati -∞.

$\lim (x \to 0) (\ln(x)) = -\infty$

Jadi, nilai limit (ln(x)) saat x mendekati 0 adalah -∞.

Contoh 4: Limit (x * ln(x)) saat x mendekati 0

Untuk menghitung limit tersebut, kita perlu menggunakan teknik pemangkatan dan definisi logaritma natural. Jika kita ingin menentukan nilai limit (x * ln(x)) saat x mendekati 0, langkah-langkah berikut dapat diikuti.

Pertama, kita perlu menggantikan x * ln(x) dengan bentuk yang lebih mudah dipahami, yaitu ln(x^x). Ini dapat dilakukan dengan mengingat sifat logaritma, yaitu ln(a * b) = ln(a) + ln(b). Sehingga:

$x * \ln(x) = \ln(x^x)$

Kemudian, saat x mendekati 0, nilai x^x juga mendekati 0. Oleh karena itu, kita dapat menyimpulkan bahwa saat x mendekati 0, ln(x^x) mendekati ln(0), yang dapat ditulis sebagai -∞.

Namun, sebelumnya, kita telah menghitung limit dari fungsi ln(x) saat x mendekati 0, dan nilainya adalah -∞. Jadi, kita sudah mengetahui bahwa ln(x) mendekati -∞ saat x mendekati 0.

Maka dari itu, nilai limit (x * ln(x)) saat x mendekati 0 dapat dihitung sebagai berikut:

$\lim (x \to 0) (x * \ln(x)) = \lim (x \to 0) \ln(x^x) = \ln(0) = -\infty$

Jadi, nilai limit (x * ln(x)) saat x mendekati 0 adalah -∞.

5.7 Limit Fungsi Faktorial dan Polinomial

Limit pada fungsi faktorial dan bentuk tak tentu yang berkaitan.

Limit fungsi faktorial dilambangkan sebagai n!, dapat memunculkan bentuk tak tentu yang melibatkan ekspresi seperti 0^0, ∞^0, atau 0*∞. Fungsi faktorial secara matematis didefinisikan sebagai hasil kali semua bilangan bulat positif dari 1 hingga n. Berikut adalah beberapa contoh perhitungan limit pada fungsi faktorial dan bentuk tak tentu yang berkaitan:

Contoh 1: Limit n! saat n mendekati ∞

Untuk menghitung limit ini, kita perlu mengingat bahwa fungsi faktorial tumbuh dengan cepat ketika n meningkat. Secara formal, n! dapat didefinisikan sebagai n! = n * (n-1) * (n-2) * ... * 2 * 1.

lim (n → ∞) n!

Ketika n mendekati tak hingga (∞), maka n! juga tumbuh secara eksponensial dan mendekati tak hingga (∞). Tidak ada bentuk tak tentu yang terlibat dalam kasus ini, dan nilai limitnya adalah tak hingga (∞).

Contoh 2: Limit n!/n^n saat n mendekati ∞

Untuk menghitung limit ini, kita perlu memperhatikan tingkat pertumbuhan dari n! dan n^n ketika n mendekati ∞.

lim (n → ∞) n!/n^n

Ketika n mendekati tak hingga (∞), maka n! tumbuh dengan cepat, tetapi n^n tumbuh bahkan lebih cepat. Sehingga, n!/n^n mendekati 0. Kita mendapatkan bentuk tak tentu 0/0.

Untuk menyelesaikan bentuk tak tentu ini, kita dapat menggunakan Pendekatan L'Hôpital:

Hitung turunan pembilang dan penyebut:

turunan (n!) = n!/((n-1)^n)

turunan (n^n) = n^(n-1)

Evaluasi limit baru:

lim (n → ∞) (n!/n^n) = lim (n → ∞) (n!/((n-1)^n)) / (n^(n-1))

Apabila kita terus menggunakan Pendekatan L'Hôpital, kita akan menemui bentuk tak tentu 0/0 pada setiap iterasi. Namun, kita akan memperhatikan sebuah pola bahwa turunan dari n! akan selalu mengandung faktor (n-1) pada setiap iterasinya.

Bentuk tak tentu tersebut dapat kita tuliskan sebagai berikut:

$\lim (n \to \infty) (n!/n^n) = \lim (n \to \infty) ((n-1)!/(n^(n-1)))$

Dengan menerapkan teknik yang serupa, kita dapat menyederhanakan bentuk tak tentu ini lebih lanjut, menjadi:

$\lim (n \to \infty) (n!/n^n) = \lim (n \to \infty) ((n-2)!/(n^(n-2)))$

Proses penyederhanaan berlanjut, sehingga akhirnya kita akan memperoleh:

$\lim (n \to \infty) (n!/n^n) = \lim (n \to \infty) (1/n) = 0$

Jadi, nilai limit dari n!/n^n ketika n mendekati tak hingga adalah 0.

Perhitungan limit pada fungsi faktorial dapat melibatkan bentuk tak tentu yang berkaitan dengan 0/0, ∞/∞, atau 0 * ∞. Penting untuk menggunakan teknik-teknik perhitungan seperti Pendekatan L'Hôpital atau pengenalan pola untuk menyelesaikan bentuk tak tentu ini dengan akurat.

Limit pada fungsi polinomial dan bagaimana menyelesaikannya.

Berikut adalah langkah-langkah umum untuk menyelesaikan limit fungsi polinomial:

1) Gantikan nilai x dengan nilai yang diberikan dalam limit.
2) Evaluasi fungsi polinomial untuk nilai x yang mendekati nilai dalam limit tersebut.

Contoh 1: Limit x^2 + 3x - 2 saat x mendekati 2

Untuk menghitung limit ini, gantikan x dengan nilai 2 dan hitung hasilnya:

$\lim (x \to 2) (x^2 + 3x - 2)$

Menggantikan x dengan 2:

$2^2 + 3 * 2 - 2 = 4 + 6 - 2 = 8$

Jadi, nilai limit dari fungsi $x^2 + 3x - 2$ saat x mendekati 2 adalah 8.

Contoh 2: Limit $3x^3 - 2x^2 + 5x + 1$ saat x mendekati 1

Untuk menghitung limit ini, gantikan x dengan nilai 1 dan hitung hasilnya:

$\lim (x \to 1) (3x^3 - 2x^2 + 5x + 1)$

Menggantikan x dengan 1:

$3 * 1^3 - 2 * 1^2 + 5 * 1 + 1 = 3 - 2 + 5 + 1 = 7$

Jadi, nilai limit dari fungsi $3x^3 - 2x^2 + 5x + 1$ saat x mendekati 1 adalah 7.

5.8 Latihan dan Contoh Soal

Berikut adalah beberapa contoh latihan dan soal untuk mengasah pemahaman dan keterampilan dalam menghitung limit fungsi bentuk tak tentu:

1. Hitung limit berikut:

a) $\lim (x \to 0) (\sin(x)/x)$

Untuk menyelesaikan limit ini, kita perlu menggunakan Pendekatan L'Hôpital, karena bentuknya adalah 0/0.

$\lim (x \to 0) (\sin(x)/x)$

Dalam bentuk ini, jika langsung menggantikan x dengan 0, kita mendapatkan 0/0. Gunakan Pendekatan L'Hôpital:

Hitung turunan pembilang dan penyebut:

turunan $(\sin(x)) = \cos(x)$

turunan $(x) = 1$

Evaluasi limit baru:

$\lim (x \to 0) (\cos(x)/1) = \cos(0) = 1$

Jadi, nilai limit $(\sin(x)/x)$ saat x mendekati 0 adalah 1.

b) $\lim (x \to \infty) (e^{(-x)} * \ln(x))$

Untuk menyelesaikan limit ini, kita perlu menggunakan Pendekatan L'Hôpital, karena bentuknya adalah $\infty * -\infty$.

$\lim (x \to \infty) (e^{(-x)} * \ln(x))$

Dalam bentuk ini, jika langsung menggantikan x dengan ∞, kita mendapatkan ∞ * -∞. Gunakan Pendekatan L'Hôpital:
Hitung turunan pembilang dan penyebut:
turunan (e^(-x)) = -e^(-x)
turunan (ln(x)) = 1/x
Evaluasi limit baru:
lim (x → ∞) (-e^(-x) / x)
Ketika x mendekati ∞, nilai e^(-x) mendekati 0, sehingga limit menjadi 0 / ∞ yang merupakan bentuk tak tentu.
Kembali gunakan Pendekatan L'Hôpital:
Hitung turunan pembilang dan penyebut:
turunan (-e^(-x)) = e^(-x)
turunan (x) = 1
Evaluasi limit baru:
lim (x → ∞) (e^(-x) / 1) = 0
Jadi, nilai limit (e^(-x) * ln(x)) saat x mendekati ∞ adalah 0.

2. Hitung limit berikut menggunakan Pendekatan L'Hôpital:
a) lim (x → 0) (x^3 / e^x)
b) lim (x → ∞) (x^2 / e^x)
c) lim (x → 0) ((1 - cos(x))/x^2)
d) lim (x → ∞) (x * ln(1 + 1/x))
3. Hitung limit berikut yang melibatkan bentuk tak tentu 0/0:
a) lim (x → 2) ((x^3 - 8)/(x - 2))
b) lim (x → 1) ((x^2 - 1)/(x - 1))
c) lim (x → 0) ((e^x - 1)/x)
d) lim (x → 0) ((1 - cos(x))/x)
4. Hitung limit berikut yang melibatkan bentuk tak tentu ∞/∞:
a) lim (x → ∞) (x^2 / e^x)
b) lim (x → 0) (sin(1/x) / x)
c) lim (x → ∞) (ln(x) / x)
d) lim (x → ∞) ((2x^2 + 3x) / (3x^2 - 4x))

DAFTAR PUSTAKA

10 Manfaat Investasi yang Akan Membuat Hidupmu Lebih Baik. (n.d.). https://www.tokopedia.com/blog/fin-manfaat-keuntungan-investasi/?utm_source=google&utm_medium=organic

George B. Thomas, J. (2017). *Kalkulus Edisi 13 Jilid 1*. Erlangga.

Hopital sin x by -0.5x. (n.d.). Wikipedia. https://en.wikipedia.org/wiki/File:Hopital_sin_x_by_-0.5x.png

L'Hôpital's rule. (n.d.). Wikipedia. https://en.wikipedia.org/wiki/L%27Hôpital%27s_rule

Limit fungsi. (n.d.). https://www.google.com/imgres?imgurl=https%3A%2F%2Fwww.pinhome.id%2Fblog%2Fwp-content%2Fuploads%2F2022%2F06%2Fzenius-education.jpg&tbnid=LNPwndbnx8HMaM&vet=12ahUKEwiyz_Ocq72AAxVZ3DgGHVfiBPwQMygXegUIARD6AQ..i&imgrefurl=https%3A%2F%2Fwww.pinhome.id%2Fblog%2Fmateri-matematika-limit%2F&docid=slrBELcCsTB0eM&w=1000&h=667&q=limit fungsi analisis matematika&ved=2ahUKEwiyz_Ocq72AAxVZ3DgGHVfiBPwQMygXegUIARD6AQ

Limit Fungsi Dalam Perencanaan Lalu Lintas. (n.d.). https://www.google.com/imgres?imgurl=https%3A%2F%2Fimage.slidesharecdn.com%2Frencanapelaksanaanpembelajaranlimitfungsixi-ipa-180213061950%2F85%2Frencana-pelaksanaan-pembelajaran-limit-fungsi-xi-ips-7-320.jpg%3Fcb%3D1668852639&tbnid=IFNXC662Ysa6KM&vet=12ahUKEwjktsrkr72AAxXjoOkKHfrZAAM

QMygTegQIARB6..i&imgrefurl=https%3A%2F%2Fwww.slideshare.net%2FBintiWulandari%2Frencana-pelaksanaan-pembelajaran-limit-fungsi-xi-ips&docid=5BPevlwXNbtSAM&w=320&h=453&itg=1&q=Limit Fungsi perencanaan lalu lintas&ved=2ahUKEwjktsrkr72AAxXjoOkKHfrZAAMQMygTegQIARB6

Nurwahyuni. (2014). KONSEP LIMIT FUNGSI. *Sigma (Suara Intelektual Gaya Matematika)*, *6 nomor 2*, 103. https://journal.unismuh.ac.id/index.php/sigma/article/view/7244/pdf

Penerapan Limit Fungsi dalam Kehidupan Sehari - hari. (n.d.). https://www.youtube.com/watch?v=Htj7i0SB4hk

Tujuh Bentuk Tak Tentu dalam Matematika. (n.d.). https://mathcyber1997.com/tujuh-bentuk-tak-tentu-dalam-matematika/

BIODATA PENULIS

Megawati S.Si., M.Si.
Dosen Matematika dan Statistika
Program Studi Agribisnis Perikanan

Penulis lahir di Malili tanggal 6 Januari 1975. Penulis adalah dosen Matematika dan Statistika pada Program Studi Agribisnis Perikanan Jurusan Bisnis Politeknik Pertanian Negeri Pangkajene Kepulalauan. Menyelesaikan pendidikan S1 pada Jurusan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam dan melanjutkan S2 pada prodi Manajemen Agribisnis Universitas Hasanuddin. Penulis menekuni bidang Penelitian dan pengabdian pada bidang pemasaran. Penulis pernah menulis buku Statistik Bisnis pada tahun 2015 dan buku Pengantar Agribsnis pada bulan januari tahun 2023.

Dr. Adi Asmara, M.Pd.

Penulis adalah Dosen S1 Pendidikan Matematika dan S2 Pedagogi di FKIP Universitas Muhammadiyah Bengkulu. Lahir di Komplek Pertamina Sungai Gerong Palembang Sumatera Selata, tanggal 15 Maret 1965. Riwayat Pendidikan:

1. SD Taman Siswa 3 Sungai Gerong tamat tahun 1977,
2. SMP Bina Utama Sungai Gerong tamat 1981,
3. SMA Yaktapena 2 Sungai Gerong tamat 1984,
4. S1 Pendidikan Matematika FKIP Unsri Palembang tamat 1989,
5. S2 Pendidikan Matematika Unesa Surabaya tamat tahun 2000,
6. S3 Ilmu Pendidikan Unib Bengkulu tamat tahun 2022.

Dr. Fajriana, S.Si., M.Si.
Dosen Pendidikan Matematika
Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, serta Teknik Informatika Fakultas Teknik Universitas Malikussaleh

Penulis lahir di Lhokseumawe tanggal 20 Juli 1976. Penulis adalah dosen pada Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, dan Teknik Informatika Fakultas Teknik, Universitas Malikussaleh. Menyelesaikan pendidikan S1 pada Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Syiah Kuala, dan melanjutkan S2 serta S3 pada Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Sumatera Utara.

Yuniar Alam, S.Pd., M.Si.
Dosen Fisika
Fakultas Ilmu Eksakta Universitas Nahdlatul Ulama Blitar

Penulis lahir di Karta tanggal 05 Juni 1990. Penulis adalah dosen pada Program Studi Fisika Fakultas Ilmu Eksakta Universitas Nahdlatul Ulama Blitar. Menyelesaikan pendidikan S1 pada Jurusan Pendidikan Fisika Universitas Lampung dan melanjutkan S2 pada Universitas Sebelas Maret prodi Ilmu Fisika. Penulis menekuni bidang Penelitian fisika teori dan aplikasinya.

Dr. Ir. Budi Witjaksana, S.T, M.T., IPU., Asean Eng.
Dosen Magister Teknik Sipil
Fakultas Teknik Universitas 17 Agustus 1945 Surabaya

Penulis lahir di Probolinggo tanggal 20 September 1970. Penulis adalah dosen pada Program Studi Magister Teknik Sipil Fakultas Teknik, Universitas 17 Agustus 1945 Surabaya. Menyelesaikan pendidikan S1 pada Jurusan Teknik Sipil Universitas 17 Agustus 1945 Surabaya dan melanjutkan S2 pada Jurusan Teknik Sipil Institut Teknologi 10 Nopember Surabaya. Pendidikan S3 penulis tempuh pada Fakultas Ekonomi dan Bisnis dengan tujuan penulis memperdalam pengetahuan mengenai biaya, khususnya perilaku biaya pada proyek konstruksi

Penulis menekuni bidang Penelitian dan Pengabdian Masyarakat dengan focus Manajemen Proyek Konstruksi, Manajemen Biaya Proyek, Material konstruksi. Karya penulis yangvtermuat dalam jurnal Internasional diantanya adalah Activity Based ManagementChange Order Model Based Economic Value Added (Archives of Business Research – Vol. 7, No.2 Publication Date: Feb. 25, 2019 DOI: 10.14738/abr.72.6201.), The Cost Estimation Using "Cost Significant Model" on The Structure of Beam Girderdi Development of DPU Bina Marga Bridge Province In East Java (J. Phys.: Conf. Ser. 1364 012076
DOI 10.1088/1742-6596/1364/1/012076)